

RECHERCHES DE L'ONERA SUR LE COUPLAGE ENTRE LE COMPORTEMENT  
ET L'ENDOMMAGEMENT DES MATÉRIAUX ET STRUCTURES

B 5-04

par Roger LABOURDETTE

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA)  
92320 Châtillon (France)

Résumé

On présente une synthèse des travaux de recherches effectués à l'ONERA, sur le thème du couplage entre le comportement et l'endommagement des matériaux et structures sous l'effet de chargements mécaniques ou thermomécaniques. On distingue deux grands types de problèmes, d'une part ceux pour lesquels la structure est tout entière sollicitée hors du domaine élastique, d'autre part ceux où la zone plastique est de dimension très faible et localisée en pointe de fissure.

Concernant le premier thème, on décrit les diverses étapes de la méthode de prévision de l'amorçage des fissures par cumulation d'endommagement en fatigue et fluage. L'application au cas concret d'aubes de turbine montre la validité de l'approche proposée.

Pour le deuxième thème, on présente l'ensemble des résultats acquis relativement aux structures bidimensionnelles, en particulier les méthodes de calcul de facteurs d'intensité des contraintes et le modèle de progression de fissures de fatigue sous chargement d'amplitude variable. Des confrontations calcul-essai sont également montrées qui valident les outils de prévision. On évoque enfin les problèmes tridimensionnels en décrivant un principe de normalité conduisant à une formulation de la progression des fissures de fatigue ; une première comparaison avec l'essai est très encourageante.

**ONERA research on the coupling  
between behaviour and damage of materials  
and structures**

Summary

The work presented here is a synthesis of research conducted in ONERA and concerning the general description of the coupling between the mechanical behaviour of materials and their damage, under mechanical and thermomechanical loadings. We distinguish two main domains of research corresponding respectively to the generalized elastoviscoplastic behaviour and small scale yielding.

For the first one, we describe the different steps of our crack initiation prediction method for creep and fatigue damage cumulation. Comparisons between tests, carried out on actual turbine blades, and calculation demonstrate the accuracy of the proposed approach.

Concerning the second domain, we present a set of results obtained for two-dimensional structures, particularly algorithms for stress intensity factors computation and the model of fatigue crack growth under variable amplitude loadings. Comparisons with tests are shown, and we observe generally good agreement. Finally we describe a normality principle which leads to the formulation of fatigue crack growth in three-dimensional cases ; from the results of a first test, presented here, we observe a sufficiently good agreement with calculation.

0 - Introduction

Le souci constant d'améliorer les performances des structures aéronautiques conduit à augmenter le niveau global des sollicitations qu'elles subissent. Bien évidemment, cette recherche d'une plus grande efficacité est limitée par des impératifs de sécurité et de garantie d'une durée de vie raisonnables. Le constructeur se trouve donc dans l'obligation de disposer d'outils, qui, dès le stade de l'avant-projet, lui permettent d'apprécier la qualité de la structure relativement aux impératifs évoqués ci-dessus. Ce besoin n'est pas limité au domaine aéronautique et de nombreuses branches de la construction mécanique font maintenant appel aux méthodes permettant de prévoir l'endommagement que subit une structure soumise à ses charges normales de service. Ceci explique le développement considérable des études de mécanique de l'endommagement et de la rupture, dont certains fondements avaient déjà été proposés il y a maintenant plus d'un demi siècle [1].

Les recherches entreprises à l'ONERA sur ce thème général, depuis dix ans environ, ont abouti à la formulation et à la mise en pratique au stade industriel, de méthodes de prévision que nous présenterons ici. Avant de décrire, plus en détail, les travaux effectués, les résultats acquis et les buts restant à atteindre, précisons que les problèmes étudiés ont été classés en deux grandes catégories :

- ceux pour lesquels la structure est tout entière sollicitée hors du domaine élastique et qui nécessitent donc la prise en compte des lois de comportement de l'élastoviscoplasticité ;
- ceux, au contraire, où la zone plastique est de dimensions très faibles, ce qui, en première approximation, permet l'utilisation des lois classiques de l'élasticité linéaire pour décrire le comportement du matériau.

1 - Prévision de la cumulation de l'endommagement dans des structures sollicitées à haute température

1. Les améliorations apportées aux techniques d'élaboration des alliages métalliques réfractaires ont permis une augmentation sensible de la température moyenne d'utilisation de ces matériaux. Ce fait est particulièrement bénéfique dans le domaine aéronautique, où la turbine à gaz est très largement utilisée pour la propulsion des avions, dans sa version turboréacteur ou turbopropulseur. De plus, des techniques nouvelles de refroidissement des aubes de turbines autorisent une augmentation de la température d'entrée ce qui entraîne une élévation du rendement à température moyenne inchangée dans les aubes. Cependant, comme on ne peut gagner simultanément dans tous les domaines, des problèmes de prévision du comportement et de l'endommagement thermomécaniques deviennent plus ardu. D'une manière très schématique, deux phénomènes sont à prendre en compte pour décrire le couplage entre comportement et endommagement dans le domaine viscoplastique : le fluage et la fatigue (et, plus précisément, la fatigue oligocyclique).

Concernant ces deux phénomènes, et leur couplage au travers du concept de dommage, un nombre important de résultats a été acquis à l'ONERA, et ceci a conduit à la mise au point d'une méthode de prévision de la durée de vie des aubes de turbine à gaz qui est maintenant utilisée industriellement au stade de l'avant-projet. Le schéma bloc de cette méthode est présenté figure 1 ; les principales étapes sont :

- l'étude de l'élément de volume macroscopique à deux points de vue :

- établissement d'une loi de comportement viscoplastique, monotone et cyclique,
  - établissement d'un modèle de cumulation d'endommagement de fatigue, de fluage, et de fatigue et fluage combinés.
- la mise au point de méthodes numériques de calcul de contraintes, déformations et endommagement dans des structures viscoplastiques.

Bien que la méthode présentée ici ait été développée à propos des aubes de turbines, elle présente néanmoins un caractère général et peut être appliquée à toute structure sollicitée dans le domaine viscoplastique.

1.2 Etude de l'élément de volume macroscopique

1.2.1 Hypothèses générales

La plupart des lois de comportement viscoplastique utilise la déformation plastique ou le travail plastique comme paramètre d'écrouissage [2] [3] [4]. Ces équations décrivent d'une manière satisfaisante l'écrouissage, le fluage primaire et secondaire ainsi que la relaxation des contraintes, mais ne traduisent pas la restauration, les effets d'histoires complexes de chargement ainsi que l'effet Bauschinger ; de plus, le comportement cyclique échappe également à leur modélisation.

Plusieurs auteurs [5] [6] [7] ont alors proposé l'utilisation de paramètres "internes", (c'est-à-dire non mesurables directement au cours de l'essai) pour améliorer la description du comportement des matériaux relativement aux phénomènes que nous avons mentionnés plus haut.

Cette approche a été reconnue compatible avec la thermodynamique des processus irréversibles [8].

La formulation du comportement viscoplastique établie à l'Office utilise donc des paramètres internes homogènes à des états de contrainte, et définissant un état neutre évolutif [7] [9] ; les hypothèses générales

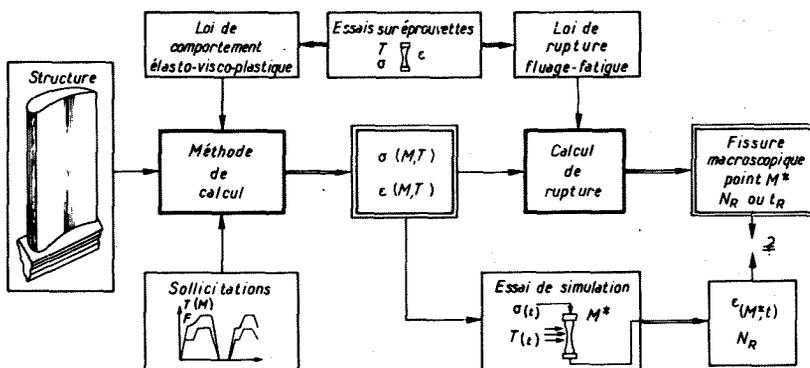


Fig. 1 - Diagramme de la méthode ONERA de prévision de l'initiation des fissures par interaction fatigue - fluage.

retenues sont les suivantes :

- H1. seules les petites déformations sont prises en compte ;
- H2. l'apport extérieur de chaleur est important, et nous admettons que les déformations mécaniques sont découplées de celles induites par la température ;
- H3. la déformation totale est partagée en trois composantes : élastique, viscoplastique et thermique ,
- H4. l'écoulement viscoplastique a lieu à volume constant ;
- H5. il existe un potentiel d'écoulement viscoplastique.

### 1.2.2 Paramètres internes

Ils sont au nombre de trois, deux d'entre eux précisant la description du comportement mécanique, le troisième traduisant l'effet de l'endommagement.

Nous utiliserons donc les paramètres suivants :

$X$  : paramètre d'écrouissage cinématique ;

Il s'interprète comme un état de contraintes résiduelles, qui traduit, au niveau macroscopique, les effets des contraintes d'origine microscopiques ; par exemple, celles qui résultent des incompatibilités entre les déformations plastiques dans des grains voisins.

$R$  : paramètre macroscopique d'écrouissage isotrope ; il permet de traduire les effets d'adoucissement ou de durcissement cyclique.

La figure 2 donne une représentation graphique de  $X$  et  $R$  ; par analogie avec les résultats bien connus de la plasticité instantanée, où  $X$  et  $R$  représenteraient respectivement la translation et la "taille" de la surface d'écoulement, on les relie à la translation et aux dimensions des surfaces équipotentielles viscoplastiques.

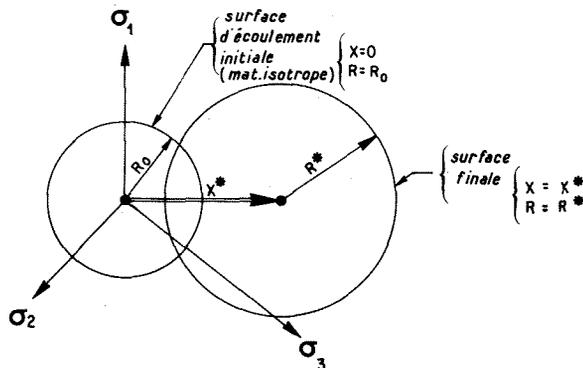


Fig. 2 - Surfaces équipotentielles.

Le troisième paramètre,  $D$ , traduit le dommage, suivant l'approche de Rabotnov et Kachanov [10] [11]. La nécessité d'introduire un troisième paramètre pour décrire le dommage macroscopique apparaît clairement lorsqu'on considère les résultats d'un essai de fluage par exemple.

Examinons, en effet, la courbe bien connue de déformation plastique en fonction du temps dans un essai de fluage (voir figure 3); qualitativement, on distingue précédant et suivant le fluage secondaire, le fluage primaire (où la vitesse de déformation décroît continûment) et le fluage tertiaire (où elle croît continûment jusqu'à la rupture). Plusieurs auteurs ont montré que le fluage primaire pouvait être traduit par des paramètres d'écrouissage du type  $X$  et  $R$ , il résulte que  $D$  est dominant dans la troisième phase. On considère alors que le fluage secondaire est une phase de transition, où  $D$  (nul au début) croît à très faible allure (voir figure 4). Notons enfin que cette modélisation est cohérente avec l'observation expérimentale de la croissance et du développement des microfissures intercrystallines.

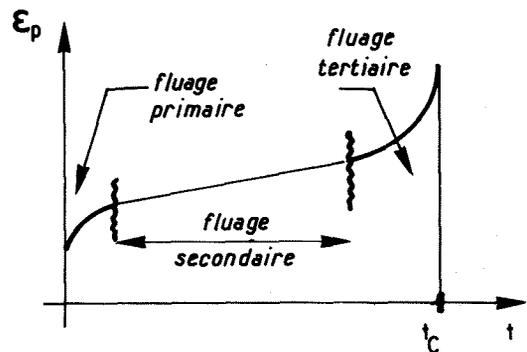


Fig. 3 - Trois phases du fluage.

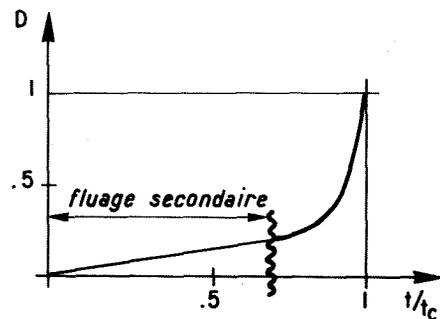


Fig. 4 - Evolution de l'endommagement en fluage.

La détermination des équations traduisant l'évolution de  $\chi$ ,  $R$  et  $D$ , se fait en observant des essais qui n'"excitent" qu'un seul paramètre à la fois.

Il est particulièrement intéressant de relier  $D$  au concept de "contrainte effective" que nous définissons ci-dessous. Considérons deux éléments de volume d'un même matériau sous contrainte uniaxiale. Le premier possède un certain endommagement, traduit par la valeur  $D$ ; son comportement élastique s'écrit :

$$1.1 \quad \sigma = \tilde{E} \cdot \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est la déformation élastique,  $\sigma$  la contrainte appliquée et  $\tilde{E}$  le module d'Young apparent. Le concept de "contrainte effective" consiste à comparer ce comportement à celui du matériau non endommagé, soumis à une contrainte  $\tilde{\sigma}$  et présentant la même déformation  $\varepsilon$  :

$$1.2 \quad \tilde{\sigma} = E \cdot \varepsilon$$

(voir figure 5).

Il vient :

$$1.3 \quad \tilde{\sigma} = \frac{E}{\tilde{E}} \cdot \sigma$$

et on pose :

$$1.4 \quad \frac{E}{\tilde{E}} = \frac{1}{1-D}$$

La relation 1.4 permet alors de déterminer  $D$  au cours d'essais de nature variée, pourvu que les variations du module d'Young soient accessibles à la mesure.

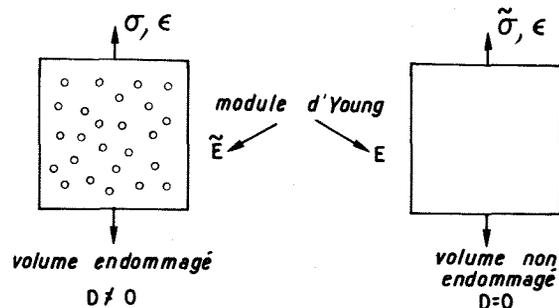


Fig. 5 - Concept de contrainte effective.

L'allure qualitative de la variation de  $D$  en fonction du nombre de cycles au cours d'un essai de fatigue (voir figure 6) montre cependant que cette détermination peut être rendue délicate, surtout dans la phase finale de l'essai.

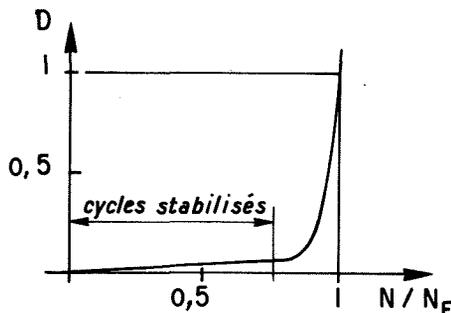


Fig. 6 - Evolution de l'endommagement en fatigue.

### 1.2.3 Aspects thermodynamiques

Les divers modèles de comportement proposés jusqu'ici ont un caractère essentiellement heuristique. Concernant la description de phénomènes complexes, où les dissipations d'énergie sont importantes, on doit cependant s'assurer, autant que faire se peut, de la cohérence des modèles proposés avec les lois fondamentales de la physique et, particulièrement, de la thermodynamique. A l'Office, les travaux de J.L.Chaboche [12] ont permis de valider, à cet égard, l'approche proposée ; notons que ces travaux se situent dans le cadre général de la description des modèles standards généralisés [13].

Considérons donc le choix de paramètres suivants :

#### Paramètres extensifs

- $\mathcal{E}^e$  : déformation élastique
- $T$  : température absolue
- $q$  : flux de chaleur
- $\alpha_j$  : paramètres internes

#### Paramètres intensifs associés

- $\sigma$  : contrainte
- $S$  : entropie spécifique
- $\text{grad} T$  : gradient de température
- $A_j$  : paramètres internes

Désignons par  $u$  l'énergie interne spécifique ; les deux premiers principes s'écrivent alors :

$$1.5 \quad \rho \dot{u} = \rho r + \sigma : \dot{\mathcal{E}} - \text{div} q$$

$$1.6 \quad \rho \dot{S} + \text{div} \left( \frac{q}{T} \right) - \rho \frac{r}{T} \geq 0$$

$\rho$  désignant la masse volumique,  $r$  la quantité de chaleur fournie par unité de volume, et  $\mathcal{E}$  la déformation.

(le symbole  $\sum$  indique la sommation double ; par exemple

$$\sigma : \dot{\mathcal{E}} = \sum_y \sigma_y \cdot \dot{\mathcal{E}}_y$$

Avec la définition de l'énergie libre spécifique ;

$$1.7 \quad \phi = u - TS$$

L'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit :

$$1.8 \quad \sigma : \dot{\mathcal{E}} - \rho(\dot{\phi} + \dot{T}S) - \frac{1}{T} q \cdot \text{grad } T \ll 0$$

Si on suppose que l'énergie libre spécifique peut s'exprimer en fonction des variables indépendantes suivantes :

- déformation thermoélastique :  $\mathcal{E}^e$
- température :  $T$
- gradient de température :  $\text{grad } T$  (ou  $g$ )
- paramètres internes extensifs :  $\alpha_j$

alors 1.5 devient :

$$1.9 \quad \left( \sigma - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \mathcal{E}^e} \right) : \dot{\mathcal{E}}^e + \sigma : \dot{\mathcal{E}}^p - \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial T} + S \right) \dot{T} - \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \frac{\partial \phi}{\partial g} \dot{g} \right) \frac{1}{T} q \cdot g \geq 0$$

L'examen de conditions thermodynamiques particulières conduit aux relations bien connues :

$$1.10 \quad \begin{aligned} \sigma - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \mathcal{E}^e} &= 0 & (a) \\ S + \frac{\partial \phi}{\partial T} &= 0 & (b) \\ \frac{\partial \phi}{\partial g} &= 0 & (c) \end{aligned}$$

1.9 s'écrit alors :

$$1.11 \quad \sigma : \dot{\mathcal{E}}^p - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j - \frac{1}{T} q \cdot g \geq 0$$

Définissons la dissipation intrinsèque  $W$  :

$$1.12 \quad \rho W = \sigma : \dot{\mathcal{E}}^p - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j$$

et supposons qu'elle soit découplée de la dissipation thermique, il vient :

$$1.13 \quad \sigma : \dot{\mathcal{E}}^p - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j \geq 0 \quad (a)$$

$$- \frac{1}{T} q \cdot g \geq 0 \quad (b)$$

A partir de 1.13 (a), on peut définir la force thermodynamique associée à la variable  $\alpha_j$  :

$$1.14 \quad A_j = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_j}$$

Finalement, en supposant que l'ensemble des  $\alpha_j$  peut se scinder en deux parties, une tensorielle, l'autre scalaire suivant le schéma ci-dessous :

$$\alpha_j \Rightarrow \begin{cases} \alpha & : \text{tenseur des hétérogénéités de déformation} \\ \rho & : \text{scalaire, caractéristique de la densité de déformation} \end{cases}$$

on met en évidence la signification thermodynamique des paramètres  $X$  et  $R$ , respectivement associés à  $\alpha$  et  $\rho$ .

$$1.15 \quad X = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \quad (a)$$

$$R = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \quad (b)$$

$\rho$  étant défini par :

$$1.16 \quad \dot{\rho} = \dot{\tilde{\rho}}_{\rho II} = (\dot{\mathcal{E}}^p : \dot{\mathcal{E}}^p)^{1/2}$$

La variable duale de  $D$  peut également se définir par la relation :

$$1.17 \quad Y = \rho \frac{\partial \phi}{\partial D}$$

Classiquement, on admet que le potentiel viscoplastique dépend de la fonction  $G$  définissant le domaine élastique :

$$1.18 \quad G = \left[ (\mathcal{B} - X) : (\mathcal{B} - X) \right]^{1/2} - R$$

$\mathcal{B}$  désignant le déviateur des contraintes.

Récemment, plusieurs travaux [12] ont eu pour but de généraliser l'hypothèse de normalité, afin de satisfaire le second principe de la thermodynamique ; on a montré qu'on peut choisir le potentiel viscoplastique  $\Omega$  et les équations gouvernant les évolutions des paramètres internes de telle façon que le second principe soit vérifié à l'aide de la seule hypothèse de normalité restreinte [11], soit :

$$1.19 \quad \Omega = \Omega(G, X, R, D, T)$$

$$1.20 \quad \dot{\mathcal{E}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}$$

Les équations relatives au comportement des variables  $\alpha_j$ , et le choix de l'énergie libre spécifique complètent le modèle viscoplastique général.

1.2.4 Equations dans le cas monodimensionnel [14]

La vitesse de déformation plastique s'écrit

$$1.21 \quad \dot{\epsilon}^P = \left\langle \frac{|\sigma - X| - R}{K} \right\rangle^n \cdot Sg(\sigma - X)$$

K et n étant des caractéristiques intrinsèques au matériau ;

le signe  $\langle \rangle$  signifie que  $\dot{\epsilon}^P = 0$  si  $|\sigma - X| - R < 0$

X et R sont définis par les relations :

$$\dot{X} = C(p) \alpha \dot{\epsilon}^n - X \dot{p} - H |X| Sg(X) \quad (a)$$

$$1.22 \quad R = R(p) \quad (b)$$

avec

$$1.23 \quad \dot{p} = \dot{\epsilon}^P$$

Le premier terme de l'équation 1.22 (a) traduit l'écroutissage cinématique non linéaire, le second rend compte de l'adoucissement, la restauration de fluage, etc....

Les fonctions C (p) et R (p) sont choisies de façon à simuler l'adoucissement ou le durcissement cyclique. L'introduction du dommage se fait au moyen du concept de contrainte effective, par les équivalences :

$$1.24 \quad \begin{aligned} \tilde{X} &= \frac{X}{1-D} & (a) \\ \tilde{R} &= \frac{R}{1-D} & (b) \\ \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{1-D} & (c) \end{aligned}$$

Il reste maintenant à préciser l'évolution du dommage.

1.2.5 Loi d'endommagement

1.2.5.1 Formulation générale

L'observation expérimentale distingue, au niveau macroscopique, deux types d'endommagement, selon que le matériau subisse un processus de fatigue ou de fluage.

En fluage, les fissures sont intercrystalines, et progressent continûment dans le temps.

En fatigue, les fissures sont transcrystalines et leur progression a lieu, essentiellement, au moment où la force excitatrice atteint sa valeur maximum, ce qui donne une allure de courbe de progression "en escalier".

Ces remarques conduisent à proposer une loi d'endommagement comprenant deux fonctions (une pour le fluage,  $f_c$ , l'autre pour la fatigue,  $f_f$ ) et exprimant l'incrément de dommage comme la somme des contributions des deux processus :

$$1.25 \quad dD = f_c(\sigma, D, \dots) dt + f_f(\sigma, D, \dots) dN$$

dt et dN représentant respectivement les incréments de temps et de nombre de cycles.

$f_c$  et  $f_f$  sont déterminées expérimentalement, et séparément, au cours de deux types d'essais :

- essais de fluage, au cours desquels on a évidemment  $f_f = 0$
- essais de fatigue, au cours desquels  $f_c$  n'est pas tout à fait nulle, mais peut être négligée si la fréquence de sollicitation est suffisamment élevée. En pratique, le domaine de fréquence de 5 à 10 Hz convient bien.

1.2.5.2 Fonction  $f_c$

Comme nous l'avons déjà signalé, D varie essentiellement au cours du fluage tertiaire, et se traduit par une accélération forte de la déformation plastique. Si nous admettons la description du fluage secondaire de Norton-Hoff :

$$1.26 \quad \dot{\epsilon}^{P*} = \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)^n$$

$\lambda$ , n étant des constantes intrinsèques au matériau. La notion de contrainte effective entraîne une description analogue du fluage tertiaire :

$$1.27 \quad \dot{\epsilon}^P = \left( \frac{\sigma}{\lambda(1-D)} \right)^n$$

ce qui fournit un moyen d'accéder à la mesure indirecte du dommage au cours d'un essai de fluage :

$$1.28 \quad D = 1 - \left( \frac{\dot{\epsilon}^{P*}}{\dot{\epsilon}^P} \right)^{1/n}$$

La figure 7 montre les évolutions de D en fonction du "temps réduit"  $t_R = t/t_c$ , où  $t_c$  désigne le temps à rupture pour l'essai considéré. Ces courbes sont relatives à l'alliage réfractaire IN 100, à la température de 1000°C.

On remarque que la relation  $D = D(t_R)$  dépend du niveau de contrainte ; dans un tel cas, la relation de Rabotnov-Kachanov :

$$1.29 \quad dD = \left( \frac{\sigma}{A(1-D)} \right)^{n_0} dt$$

doit être modifiée, car elle conduit, pour des essais de fluage ( $\sigma = \text{constante}$ ), à une courbe unique :

$$1.30 \quad D = 1 - (1 - t_R)^{1/n_0 + 1}$$



stabilisé, (1.34) entraîne :

$$1.35 \quad \Delta \varepsilon^{p*} = \left( \frac{\Delta \sigma}{k_F} \right)^{m_F}$$

et au cours de la phase précédant la rupture le dommage s'exprime alors par la relation

$$1.36 \quad D = 1 - \left( \frac{\Delta \varepsilon^{p*}}{\Delta \varepsilon^p} \right)^{1/m_F}$$

qui fournit ainsi un moyen d'accéder à la mesure indirecte de D au cours d'un essai de fatigue pure (figure 9).

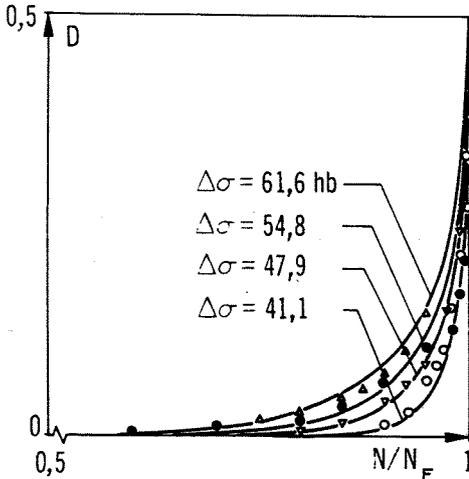


Fig. 9 - Evolution de l'endommagement en fatigue. Alliage IN 100 à 1000°C.

La loi d'endommagement s'exprime alors [16]

$$1.37 \quad dD = \left( 1 - (1-D)^{\beta+1} \right)^{\alpha(\Delta\sigma)} \cdot \left( \frac{\Delta\sigma}{M(\bar{\sigma})(1-D)} \right)^{\beta} \cdot dN$$

$\bar{\sigma}$  désignant la contrainte moyenne ;  $\alpha(\Delta\sigma)$ ,  $\beta$

$M(\bar{\sigma})$  caractéristiques du matériau, dépendent de la température. L'intégration de l'équation 1.37, avec  $\Delta\sigma = \text{constante}$ , et les conditions  $N = 0$

$$\left. \begin{array}{l} N = N_F \\ \text{ou} \\ N_R = 1 \end{array} \right\} D = 1$$

$N_R$  désignant le nombre de cycles "réduit"  $N/N_F$  et  $N_F$  le nombre de cycles à rupture, conduit à

$$1.38 \quad N_F = \frac{1}{(1+\beta)(1-\alpha) \left( \frac{\Delta\sigma}{M} \right)^{\beta}} \quad (a)$$

$$D = 1 - \left( 1 - N_R^{1/\alpha} \right)^{1/\beta} \quad (b)$$

Comme le montre la figure 10, cette loi d'endommagement donne de bons résultats dans la prévision de la rupture en fatigue à deux niveaux de contrainte, c'est-à-dire qu'elle traduit bien la cumulation non linéaire de l'endommagement en fatigue pure.

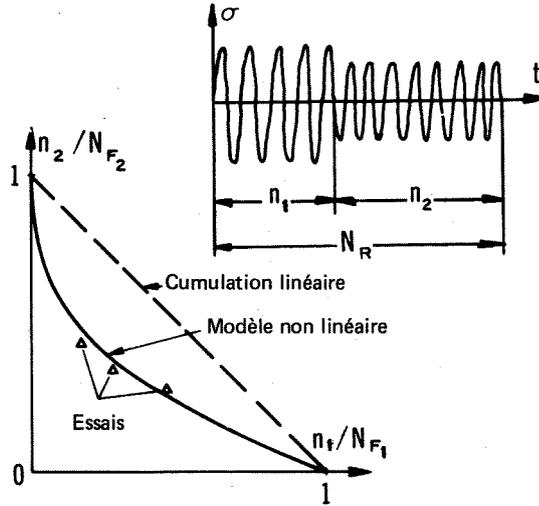


Fig. 10 - Comparaison prévision - essais en fatigue à deux niveaux de chargement. Alliage IN 100 à 1000°C.  $\Delta\sigma_1 = 61,6 \text{ hbar}$ ,  $\Delta\sigma_2 = 41,1 \text{ hbar}$ ,  $N_{F1} = 520 \text{ cycles}$ ,  $N_{F2} = 24\,400 \text{ cycles}$ .

#### 1.2.5.4 Interaction fluage-fatigue

Conformément à la formulation précédemment établie, on peut maintenant prévoir l'interaction fluage-fatigue, sous histoire complexe de sollicitation ; pour cela, on intègre numériquement la relation 1.25, compte tenu de 1.31 et 1.37.

Les figures 11 et 12 présentent une synthèse des comparaisons calcul-essai effectuées avec le modèle proposé ; on note, en particulier, le gain obtenu grâce aux cumulations non linéaires (figure 12), l'écart étant ramené d'un facteur 5 à 10 pour la cumulation linéaire à un facteur 2.

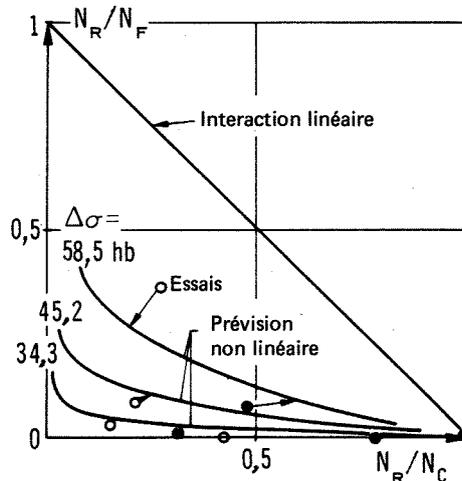


Fig. 11 - Interaction fatigue - fluage. Comparaison calcul - essai. Alliage IN 100 à 1000°C.

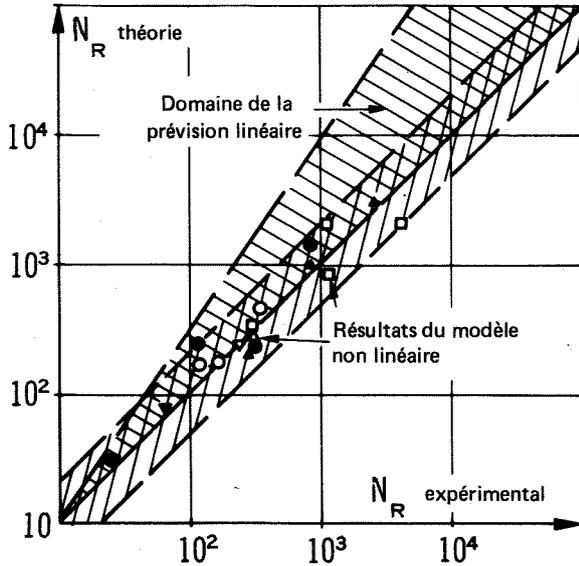


Fig. 12 - Synthèse des comparaisons calcul - essai. Interaction fatigue fluage. Alliage IN 100 à 900°C et 1000°C.

### 1.3 Calculs de structures en viscoplasticité

#### 1.3.1 Rappels

Dans le domaine élastique, le calcul des structures aboutit toujours à la résolution d'un système d'équations linéaires ; par exemple, l'utilisation de la méthode des éléments finis bien connue conduit à un système de la forme :

$$1.39 \quad [K]\{q\} = \{R\} + \{R_0\}$$

où  $K$  : désigne la matrice de rigidité,  
 $q$  : " les déplacements nodaux,  
 $R$  : " les charges extérieures  
 $R_0$  : " " "  
 correspondant à un état initial de contrainte ou de déformation supposé connu.

Après résolution de 1.39, les champs de déplacement, contrainte et déformation sont calculés à l'aide des relations :

$$1.40 \quad \{u\} = [N]\{q\} \quad (a)$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\} \quad (b)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (c)$$

où  $[N]$  et  $[B]$  sont des matrices ne dépendant que de la géométrie et de la discrétisation de la structure, tandis que  $[D]$  est la matrice d'élasticité du matériau.

#### 1.3.2 Equations linéarisées de l'élasto-viscoplasticité

Elles s'écrivent :

$$1.41 \quad \sigma_{ij,j} + \dot{f}_i = 0$$

- équ.d'équilibre

$$1.42 \quad \dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{F}_i \quad \text{sur } S_\sigma$$

$$1.43 \quad \dot{u}_i = \dot{u}_i^D \quad \text{sur } S_u$$

conditions aux limites

$$1.44 \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$$

- rel. déplacements-déformations

- loi de comportement :

$$1.45 \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \dot{\varepsilon}_{ij}^{th}$$

$$1.46 \quad \dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial T} \dot{T}$$

$$1.47 \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \mathcal{F}(\sigma_{II}, \tilde{e}_{pII}, T) \cdot \delta_{ij}$$

$$1.48 \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{th} = (\alpha \dot{T} + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \dot{T}) \cdot \delta_{ij}$$

$\varepsilon^e, \varepsilon^p, \varepsilon^{th}$  désignant respectivement la déformation élastique viscoplastique et thermique.

$\sigma_{II}$  et  $\tilde{e}_{pII}$  désignant respectivement les seconds invariants du déviateur des contraintes et de la déformation plastique, et  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique du matériau.

L'équation 1.47 implique l'hypothèse de cumulation de l'écrouissage par déformation [17].

Finalement, la combinaison des équations (1.45) à (1.48) entraîne :

$$1.49 \quad \dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij}^o$$

avec

$$1.50 \quad \dot{\sigma}_{ij}^o = -2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}^p - (3\lambda + 2\mu) \left( \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right) \dot{T} + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial T} \dot{\sigma}_{ij}$$

Compte tenu de l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement plastique, 1.49 peut également s'écrire :

$$1.51 \quad \dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij}^o$$

ce qui est formellement identique au résultat obtenu en élasticité pure avec champ initial de contrainte.

Ce résultat est très important car il montre que l'on peut résoudre un problème de visco-élasticité avec les mêmes méthodes qu'en élasticité, la seule différence provenant du "champ initial" que l'on doit recalculer à chaque pas. Notons que cette conclusion est indépendante de la méthode de résolution adoptée, et peut donc s'appliquer également quand la structure est étudiée par la méthode des équations intégrales [25].

### 1.3.3 Algorithme de résolution

Classiquement, on suppose résolu le problème au temps  $t$  et on utilise un développement de Taylor limité au premier ordre pour calculer la solution au temps  $t + \Delta t$ .

. au temps  $t$  :

$q_i, u_i, \epsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  sont connus

$T, \dot{T}, \dot{u}_i^D, \dot{F}_i, \dot{f}_i$  sont donnés.

On calcule alors :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P \text{ (équ.1.47) et } \dot{\sigma}_{ij}^0 \text{ (équ.1.50)}$$

Compte tenu de la remarque du paragraphe 1.3.2 le système à résoudre est alors :

$$1.52 \quad [K] \{\dot{q}\} = \{\dot{R}\} + \{\dot{R}_0\}$$

$\{\dot{R}\}$  étant déterminé par la connaissance de  $\{\dot{F}_i\}$

et  $\{\dot{f}_i\}, \{\dot{u}_i^D\}$

$\{\dot{R}_0\}$  dépend uniquement de  $\{\dot{\sigma}_{ij}^0\}$

Avec l'hypothèse des petits déplacements et petites déformations, et si on admet une indépendance de la structure de  $[K]$  dans le cas non isotherme, alors il suffit "d'inverser" une seule fois et de garder "l'inverse" en mémoire pour l'utiliser à chaque pas de calcul, ce qui constitue, évidemment, un avantage déterminant.

La résolution de 1.52 fournit alors  $\{\dot{q}_i\}$  puis les relations 1.40 (a), (b) et (c) fournissent respectivement

$$\{\dot{u}_i\}, \{\dot{\epsilon}_{ij}\}, \{\dot{\sigma}_{ij}\}$$

. au temps  $t + \Delta t$  :

on calcule alors :

$$1.53 \quad \{q\}_{t+\Delta t} = \{q\}_t + \{\dot{q}\}_t \cdot \Delta t$$

$$1.54 \quad \{\epsilon_{ij}^P\}_{t+\Delta t} = \{\epsilon_{ij}^P\}_t + \{\dot{\epsilon}_{ij}^P\}_t \cdot \Delta t$$

### 1.3.4 Choix du pas de temps optimal

Dans le but d'optimiser les conditions de calcul, c'est-à-dire de minimiser le temps de calcul pour une précision donnée, on peut, à chaque instant, déterminer une valeur optimale du pas d'intégration  $\Delta t$  [18]. Pour cela, on rend le terme du second ordre aussi faible que l'on veut devant le premier ; on a, en effet : (en négligeant les termes d'ordre supérieur) :

$$1.55 \quad \epsilon_{ij}^P(t+\Delta t) = \epsilon_{ij}^P(t) + \dot{\epsilon}_{ij}^P(t) \left(1 + \frac{\ddot{\epsilon}_{ij}^P(t) \Delta t}{2 \dot{\epsilon}_{ij}^P(t)}\right) \cdot \Delta t$$

si

$$1.56 \quad \Delta t \leq 2\eta \left| \frac{\dot{\epsilon}_{ij}^P(t)}{\ddot{\epsilon}_{ij}^P(t)} \right| \quad \forall i, j$$

alors l'erreur relative maximum sur  $\Delta \epsilon_{ij}^P$  sera inférieure ou égale à  $\eta$

Il faut noter que cette procédure est rendue particulièrement aisée du fait de la forme explicite de l'expression de  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$  (équ.1.47).

Enfin, remarquons que le démarrage du calcul exige des conditions initiales que nous posons toutes nulles, sauf quand la fonction  $\mathcal{F}$  n'est pas définie pour  $\epsilon_{pp} = 0$ . Dans ce cas, nous prenons, arbitrairement, une valeur assez faible,  $10^{-8}$  par exemple.

## 1.4 Prévision de la durée de vie d'une aube de turbine

### 1.4.1 Exposé du problème

Au cours de son utilisation, une aube de turbine subit un certain nombre de cycles "sol-air-sol". Ce processus induit une cumulation de dommage par fluage et fatigue oligocyclique, ce qui entraîne, après un nombre  $N_{HS}$  de cycles, l'apparition d'une macrofissure dans l'aube.

Le but de la méthode est de prévoir ce nombre  $N_{HS}$  [19].

### 1.4.2 Hypothèses

Les hypothèses que nous retenons ici sont celles qui ont permis, à l'origine de la méthode, sa formulation pratique et sa mise en oeuvre au niveau industriel. Certaines d'entre-elles peuvent cependant être modifiées comme conséquence des recherches que nous avons présentées préalablement ; quelques points particuliers seront évoqués en conclusion de cette synthèse.

H6 : pour la détermination des caractéristiques cycliques stabilisées, le comportement mécanique est supposé découplé du processus de dommage ;

H7 : le comportement mécanique est traduit par des équations simplifiées, c'est-à-dire que :

. l'érouissage est de type indifférent

[20]

. l'adoucissement (ou le durcissement) cyclique est traduit par un seul coefficient ;

H8 : l'aube est considérée comme une poutre, et on fait l'hypothèse de Bernoulli ; ceci entraîne que chaque section plane possède 3 degrés de liberté :

1 translation et 2 rotations de flexion.

H9 : le cycle stabilisé dure de la stabilisation à la rupture ;

H10 : les endommagements de fatigue et de fluage sont cumulés linéairement.

### 1.4.3 Caractérisation du matériau

#### 1.4.3.1 Comportement

Compte tenu de H8, on se limite au comportement unidimensionnel :

$$1.57 \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p + \dot{\epsilon}^{th} \quad (a)$$

$$\dot{\epsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E} - \frac{\sigma}{E^2} \cdot \frac{dE}{dT} \cdot \dot{T} \quad (b)$$

$$\dot{\epsilon}^p = f(\sigma, \tilde{\epsilon}^p) \cdot Sg(\sigma) \quad (c)$$

$$\dot{\epsilon}^{th} = (\alpha + T \frac{\partial \alpha}{\partial T}) \dot{T} \quad (d)$$

$\tilde{\epsilon}^p$  est le paramètre de cumulation d'érouissage :

$$1.58 \quad \tilde{\epsilon}^p = \int_{t_0}^t |\dot{\epsilon}^p| \cdot dt$$

$t_0$  est la dernière valeur du temps où un changement de signe de la contrainte s'est produit.

Selon [20] [21], la fonction  $f$  s'écrit

$$1.59 \quad f(\sigma, \tilde{\epsilon}^p) = \left( \frac{|\sigma|}{K \tilde{\epsilon}^p^{1/m}} \right)^n$$

Les exposants  $m$ ,  $n$ , et le facteur de résistance  $K$  sont déterminés par des essais d'érouissage et relaxation en traction et vérifiés par des essais de fluage. La figure 13 présente une telle vérification pour l'alliage réfractaire IN100 aluminisé. Le tableau

(figure 14) précise l'évolution de ces coefficients avec la température.

D'une manière approchée, l'adoucissement (resp. le durcissement) cyclique peut être traduit par un coefficient de résistance  $K_S$  inférieur (resp. supérieur) à sa valeur initiale  $K$ . Dans le cas particulier de l'IN 100,  $K_S$  a été pris égal à 0,94  $K$ .

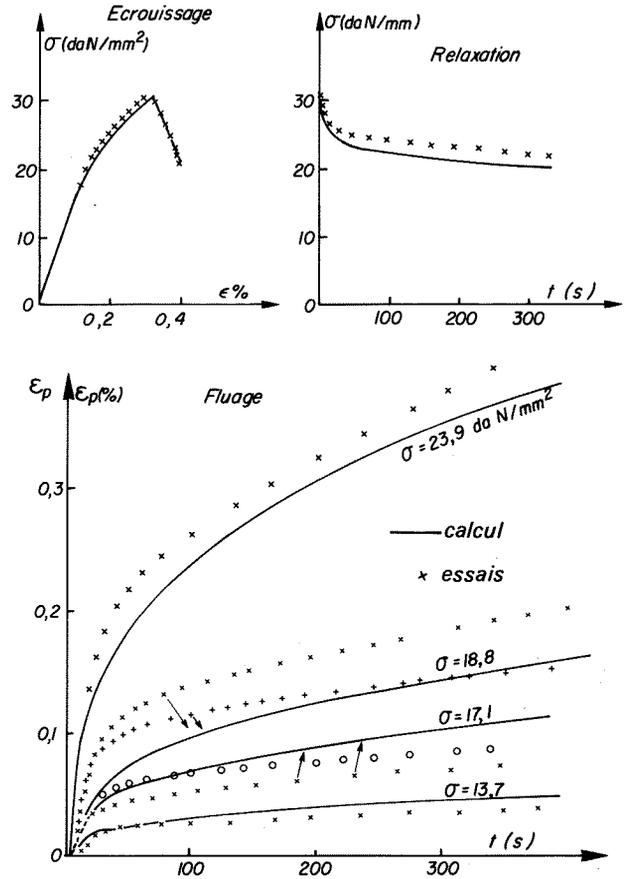


Fig. 13 - Vérification de la loi de comportement. Alliage IN 100 - 1000°C.

T	n	m	K	r	A
20	90	36	100		
700	30	27	134	16	107.8
800	19	14	181.5	10	101.1
900	14	6.8	235.6	6.3	80.3
1 000	11	5.6	202.4	5.2	45.7
1 110	10	5	124.5	3,58	24.4
°C			daN / mm <sup>2</sup> secondes		daN / mm <sup>2</sup> heures

Fig. 14 - Coefficient du comportement viscoplastique et de la rupture de l'alliage IN 100 aluminisé.

### 1.4.3.2 Rupture

Les essais de fatigue pure sont interprétés au travers des relations de Manson-Coffin [22] [23] :

$$1.60 \quad \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^p = \frac{\Delta \sigma}{E} + \Delta \varepsilon^p = \frac{a}{E} N_F^{-\alpha} + b N_F^{-\beta}$$

$\Delta \varepsilon^e$ ,  $\Delta \varepsilon^p$ ,  $\Delta \sigma$  sont définis au cycle stabilisé,  $N_F$  est le nombre de cycles à rupture en fatigue,  $a, b, \alpha$  et  $\beta$  sont intrinsèques au matériau. La figure 15 montre un exemple d'une telle interprétation.

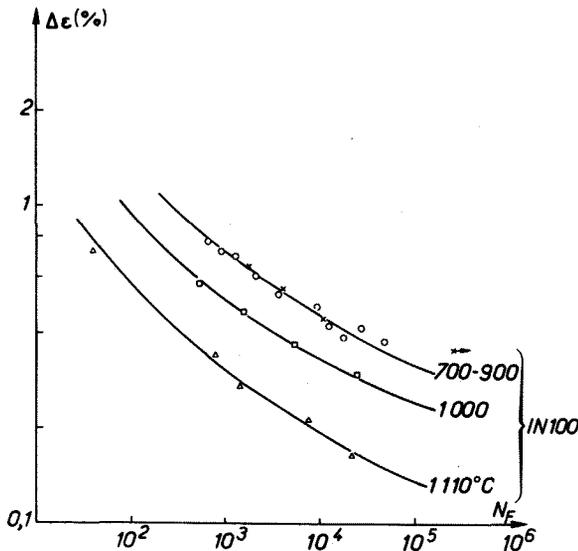


Fig. 15 - Résultats des essais de fatigue pure. Alliage IN 100 - 1000°C. Contrainte sinusoïdale alternée. Fréquence : 5 Hz.

En fluage, on utilise la relation de Rabotnov-Kachanov (équ. 1.29), et l'interaction fluage est conforme à l'équation 1.25 :

$$1.61 \quad \frac{1}{N_{HS}} = \frac{1}{N_F(\Delta \varepsilon)} + \int_0^{\Delta t} \frac{dt}{t_c(\sigma, T)}$$

$\Delta t$  est la durée du cycle stabilisé, et  $t_c$  le temps à rupture en fluage sous la contrainte  $\sigma$  et la température  $T$ .

Quand  $T$  varie dans le cycle, le choix de la fonction  $N_F(\Delta \varepsilon)$  devient délicat ;

nous supposons alors que l'endommagement en fatigue se produit essentiellement pour la valeur maximum de la contrainte, et en conséquence, nous choisissons la valeur correspondante de  $T$  pour définir  $N_F(\Delta \varepsilon)$ .

### 1.4.4 Calcul des contraintes et déformations

L'hypothèse de Bernoulli permet d'exprimer la vitesse de déformation en tout point  $M(x, y, z)$  d'une section plane (voir figure 16) :

$$1.62 \quad \dot{\varepsilon} = \dot{A} + \dot{B}x + \dot{C}y$$

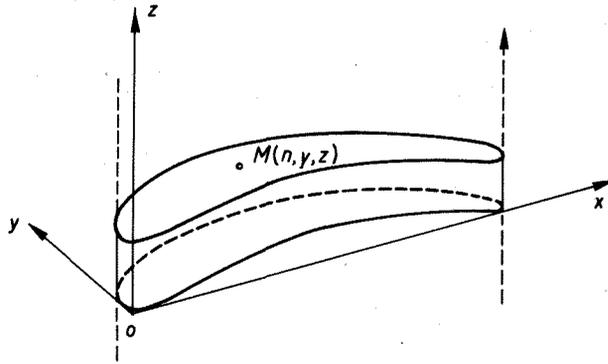


Fig. 16 - Sections planes d'une aube.

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$1.63 \quad \begin{cases} \int_S \dot{\sigma}_z ds = \dot{F} \\ \int_S \dot{\sigma}_y ds = \dot{M}_x \\ \int_S \dot{\sigma}_x ds = -\dot{M}_y \end{cases}$$

$\dot{F}$  est la "vitesse" de force centrifuge ;  $\dot{M}_x$  et  $\dot{M}_y$  peuvent être considérés comme nuls

en négligeant les effets de relaxation dus à la force centrifuge [24]. Combinant (1.62) et (1.63 a,b,c) il vient [25] :

$$1.64 \quad [K] \begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \\ \dot{C} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{F} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \int_S \left[ E \left( \dot{\varepsilon}^p + \left( \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right) \dot{T} \right) - \frac{\dot{\varepsilon}}{E} \sigma \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \right] ds$$

avec

$$1.65 \quad [K] = \int_S E \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} ds$$

Ce système est alors résolu par linéarisation pas à pas dans le temps, avec choix optimal du pas de temps. Plusieurs cycles successifs sont calculés jusqu'à stabilisation, puis les équations de rupture sont intégrées et on peut ainsi déterminer le point critique de l'aube et le nombre de cycles à initiation.

### 1.4.5 Vérification expérimentale

On applique à une aube de série un chargement mécanique et une sollicitation thermique, dans une tranche, aussi voisins que ceux qui sont supposés se produire réellement.

Le schéma général de l'installation est indiqué figure 17.

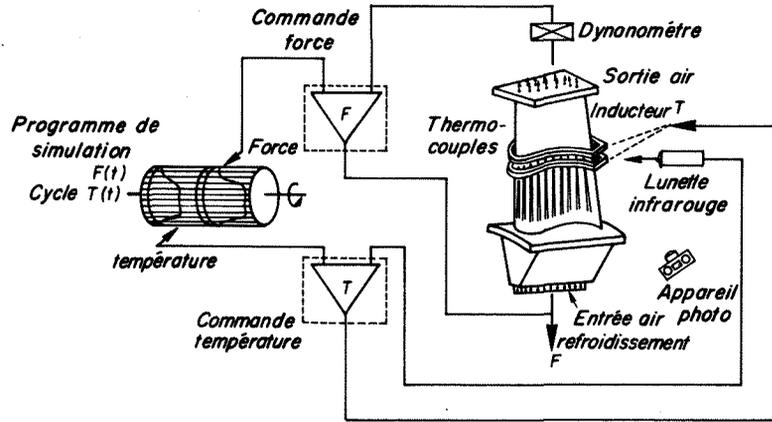


Fig. 17 - Schéma bloc de l'installation d'essai.

#### 1.4.5.1 Chauffage

La carte de température requise est engendrée par chauffage, par induction, de puissance moyenne 6 kW et fréquence moyenne 500 kHz. Par tâtonnements, on détermine une forme d'inducteur telle que la distribution de température soit aussi proche que possible de celle souhaitée (voir figure 18).

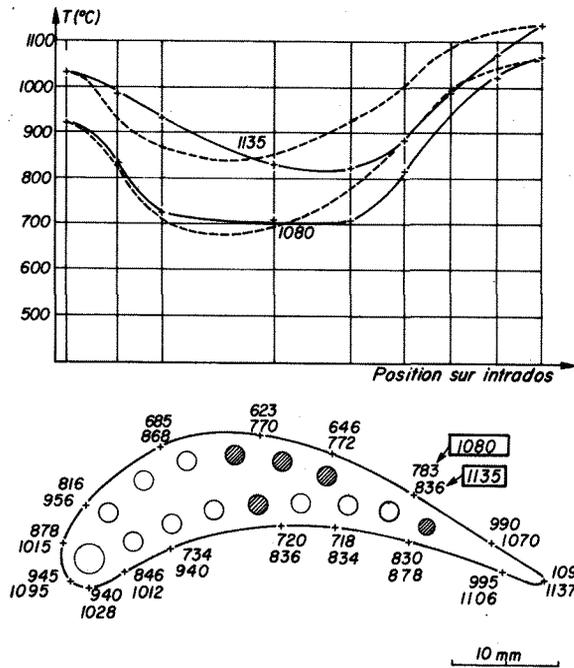


Fig. 18 - Distribution de température dans une section d'aube : 1080°C : décollage ; 1135°C : interception haute altitude. --- Distribution souhaitée ; +++ Mesures.

L'aube est refroidie par circulation d'air dans les canaux internes, certains d'entre-eux étant obturés pour ajuster les gradients de température. Cette dernière est mesurée par

thermocouples (50 environ) soudés sur la surface extérieure de l'aube et dans les canaux de refroidissement. Un asservissement maintient le niveau de température requis pendant la durée de l'essai qui peut atteindre et dépasser une semaine.

Comme les thermocouples soudés pourraient engendrer un endommagement, la température dans la section utile est mesurée par une lunette à émission totale.

#### 1.4.5.2 Chargement mécanique

La force est engendrée par un vérin asservi, électrohydraulique de force maximum  $\pm 160$  kN.

#### 1.4.5.3 Détection de l'initiation de fissure

Des photographies, prises automatiquement sur pellicules sensibles aux infrarouges, permettent, grâce à un agrandissement de l'ordre de 100, de définir l'évolution de la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles. Ainsi, l'extrapolation vers la longueur de fissure nulle donne le nombre de cycles cherché (voir figure 19).

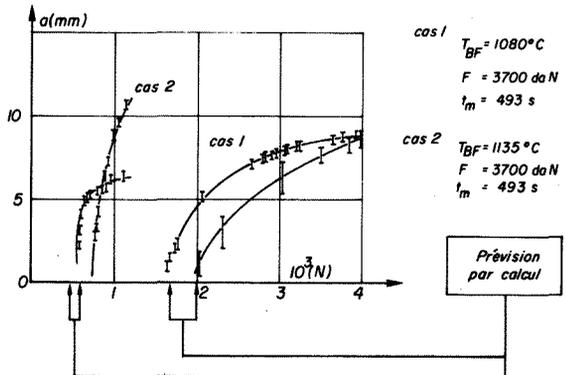


Fig. 19 - Progression de fissure au cours d'essais. Comparaison calcul - essai à initiation de fissure.

#### 1.4.5.4 Résultats et comparaisons calculs-essais

La figure 20 montre les diverses formes de cycles réalisées au cours des essais. Un exemple d'évolution de température en deux points identiques, au cours de deux essais, montre la bonne reproductibilité des conditions d'essais (voir figure 21).

Les nombres de cycles à initiation sont indiqués figure 20, et la progression de fissure figure 19. On note que dans une première période, la vitesse de progression de fissure décroît continûment ; ce comportement est dû à la relaxation des contraintes thermiques induites par la progression de la fissure.

La figure 22 montre deux cycles calculés, pour deux points d'une section plane. La forme peu courante de ces cycles provient de l'évolution de la température et donne une bonne idée de la difficulté du problème.

La figure 19 montre des exemples de prévision ; les valeurs extrêmes tiennent compte de la dispersion des caractéristiques mécaniques du matériau, et des imperfections dans la représentation de leur comportement. Malgré cela l'ordre de grandeur du nombre de cycles à initiation est très correctement prévu, ce qui valide la méthode proposée.

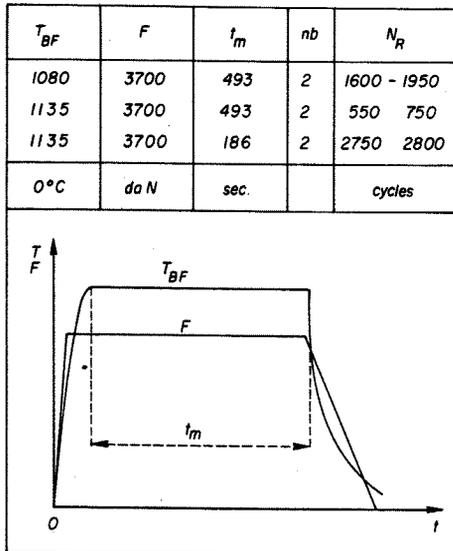


Fig. 20 - Caractéristiques des cycles et nombre de cycles à initiation.

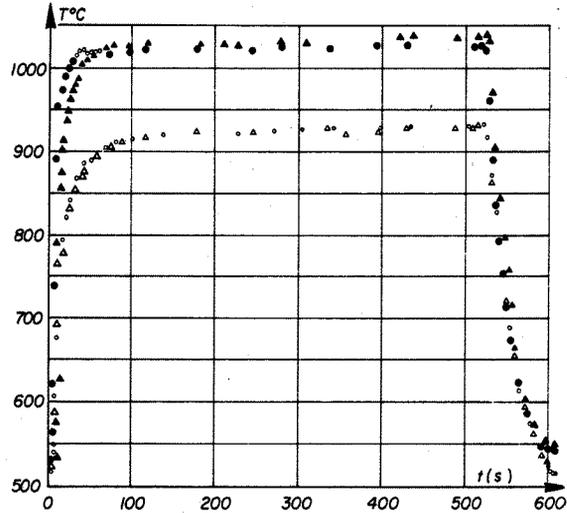


Fig. 21 - Cycles de température en deux points d'une même section.

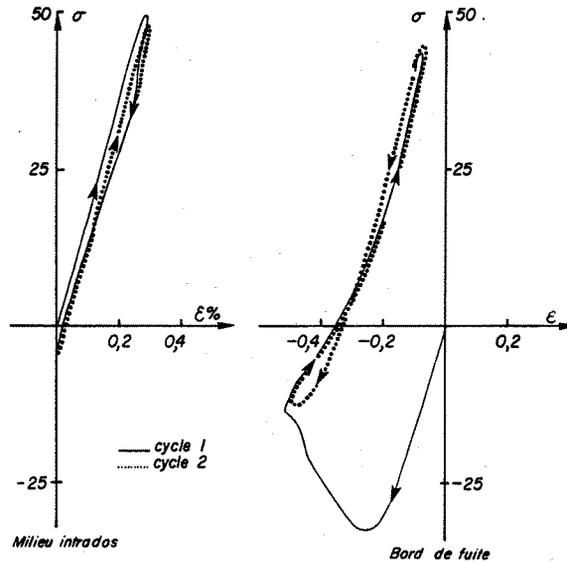


Fig. 22 - Cycles contrainte - déformation calculés

#### 1.5 Conclusions

Etant donné les difficultés rencontrées (forte non linéarité, dispersion des caractéristiques des matériaux), le résultat atteint est très satisfaisant. Les écarts observés ont vraisemblablement deux origines différentes :

- mécaniques
- physico-chimiques (oxydation, corrosion, état de protection,...)

Il est clair que les secondes ne peuvent être traitées par un modèle mécanique, tout au moins dans un avenir prévisible. Concernant le domaine mécanique, nous pouvons d'ores et déjà introduire des modifications qui, à notre avis, doivent entraîner une meilleure description du phénomène d'endommagement d'une structure. Par exemple :

- au lieu de calculer un certain nombre de cycles avant d'obtenir une stabilisation, il serait certainement plus avantageux de modéliser directement le cycle stabilisé. Les recherches en cours à ce sujet à l'ONERA sont maintenant bien avancées, et semblent pouvoir fournir des résultats intéressants.
- dans la première partie de cette présentation nous avons décrit des modèles de cumulation non linéaires. Cependant, pour des raisons déjà exposées, la méthode numérique est fondée sur la cumulation linéaire ; nous pensons donc que l'introduction de modèles d'endommagement plus raffinés, tels que ceux que nous avons présentés, doit amener une amélioration sensible des résultats de prévision. Un tel travail est actuellement en cours.
- enfin, l'évolution des technologies d'élaboration ainsi que la conception de nouveaux moteurs entraînent, à moyen terme, la nécessité de disposer de méthodes de calcul adaptées aux cas tridimensionnels. Dans ce domaine aussi, des recherches de base sont en cours à l'Office.

## 2. Prévision de la progression des fissures de fatigue dans les structures élastiques linéaires

2.1 Les résultats maintenant classiques de l'analyse en élasticité linéaire [26] [27] montrent que les champs de contrainte et de déformation sont singuliers à la pointe d'une fissure. Dans les cas bidimensionnels, (c'est-à-dire les plaques en contraintes ou déformation plane), il existe trois modes de base de croissance de fissure, caractérisés chacun par un facteur d'intensité des contraintes, et distingués par les indices romains :

- . I : pour le mode de traction-compression, (facteur  $K_I$ )
- . II : pour le mode de cisaillement plan ( $K_{II}$ )
- . III : pour le mode de cisaillement antiplan ( $K_{III}$ )

La figure 23 illustre ces trois modes.

Ces résultats ne sont plus valables pour des structures de géométrie plus complexe que les plaques ; citons, en particulier, les travaux de Bergez [28] qui a montré que cinq facteurs étaient nécessaires (et suffisants) pour décrire l'état de fissuration d'une coque.

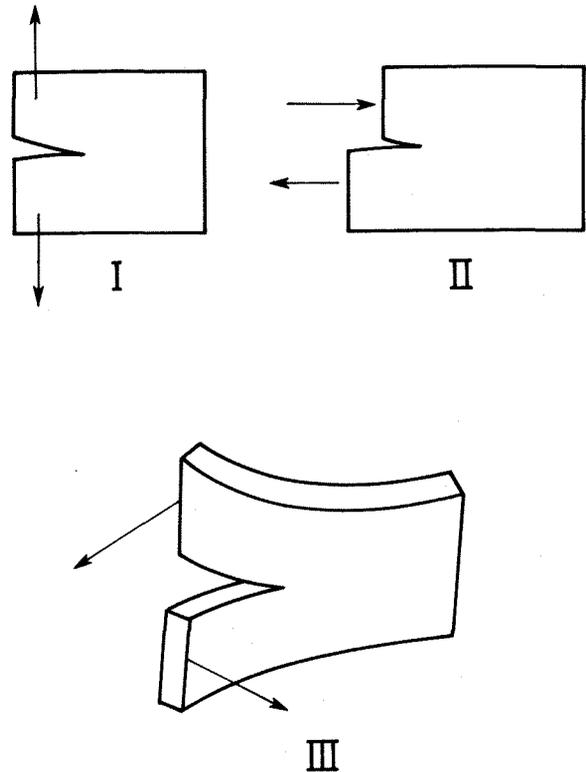


Fig. 23 - Modes d'ouverture de fissure.

Ces remarques ont conduit certains auteurs à proposer, comme paramètre caractéristique d'un état de fissuration, le taux d'énergie libérée de Griffith [1], dont la définition et le calcul ne présentent pas d'ambiguïté en élasticité bi ou tridimensionnelle ; ajoutons que Lemaître [29] a montré que sa validité s'étendait du cas du comportement élastoplastique.

Le thème général des travaux effectués à l'ONERA et qui seront présentés ici, est la prévision de la progression des fissures de fatigue dans des structures ne présentant qu'une "plasticité restreinte", c'est-à-dire où les dimensions de la zone plastique sont très faibles devant celles de la structure étudiée. Nous avons distingué deux grands types de problèmes : ceux où l'état de contrainte est, au plus bidimensionnel, et ceux où une analyse tridimensionnelle est nécessaire. Dans le premier cas, les approches par taux d'énergie de Griffith ou par le facteur d'intensité des contraintes sont équivalentes, du fait que nous avons limité notre étude au cas du mode I (le plus couramment rencontré en pratique) ; en conséquence, nous utilisons la deuxième approche qui est la plus fréquemment adoptée dans ces cas. Pour les problèmes tridimensionnels, la formulation retenue sera, en revanche, basée sur un paramètre énergétique "global", homogène à celui de Griffith, et qui semble rendre compte d'une manière suffisamment précise d'un état de fissuration dans un tel milieu.

La méthode générale de prévision de la progression des fissures de fatigue est alors décrite sur l'organigramme de la figure 24.

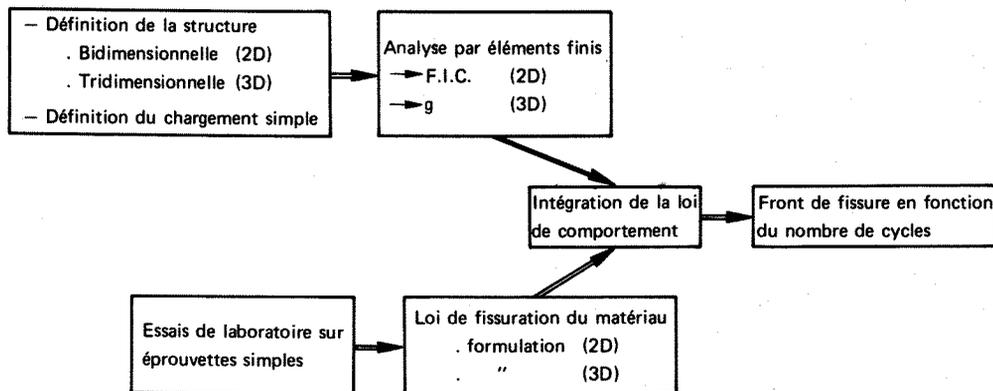


Fig. 24 - Principe de la méthode de prévision de progression des fissures de fatigue.

## 2.2 Problèmes bidimensionnels

### 2.2.1 Hypothèses

L'ensemble des résultats présentés ici découle des hypothèses suivantes :

H1 : nous considérons des structures en état de contraintes planes,

H2 : le matériau est élastique linéaire, et l'influence de la zone plastique "restreinte", n'est pas prise en compte, sauf pour la modélisation de l'effet de retard à la fissuration.

H3 : le chargement extérieur est "simple", c'est-à-dire que toutes les forces croissent, au cours du temps, proportionnellement à un même paramètre scalaire.

H4 : le mode de fissuration est le mode I.

### 2.2.2 Détermination du facteur d'intensité des contraintes

Deux types de méthodes ont été mises au point à l'Office : numériques et expérimentales.

#### 2.2.2.1 Méthodes numériques

Les deux méthodes que nous présentons ici, permettent le calcul du facteur d'intensité des contraintes à partir de la connaissance du taux d'énergie de Griffith.

Rappelons que ce taux (G) s'exprime par :

$$2.1 \quad G = - \frac{\delta V}{\delta A}$$

$\delta V$  étant la variation de l'énergie potentielle associée à la variation  $\delta A$  de l'aire de la fissure. Dans le cas d'un matériau élastique

linéaire, G peut facilement s'exprimer en fonction de la variation du travail des forces extérieures  $\delta W$  :

$$2.2 \quad G = \frac{1}{2} \frac{\delta W}{\delta A} \quad [30]$$

En état de contraintes planes, on a :

$$2.3 \quad K^2 = EG$$

E étant le module d'Young du matériau et K le facteur d'intensité des contraintes. Les relations 2.2 et 2.3 permettent donc de calculer K à partir de la connaissance du travail des efforts extérieurs.

#### 2.2.2.1.1 Programme

FICEL [31]

Il calcule les diverses valeurs  $\delta W$ ,  $\delta A$ , G et K ainsi que les contraintes et déformations au voisinage de la fissure. Précisons quelques caractéristiques de ce programme :

. Type de structures : panneaux rectangulaires munis (ou non) de raidisseurs collés, rivés ou intégraux. Notons que l'introduction d'un critère de rupture de la colle permet de prendre en compte l'influence de la zone décollée en pointe de fissure [32]

. Types d'éléments : triangulaires à 6 noeuds à interpolation quadratique des déplacements ce qui assure une meilleure convergence. On peut également introduire l'hypothèse des déformations planes.

. Maillage automatique : un maillage typique et est représenté figure 25

Des comparaisons entre résultats calculés par FICEL et ceux obtenus expérimentalement ou par d'autres méthodes numériques, montrent un excellent accord (figures 26 et 27).

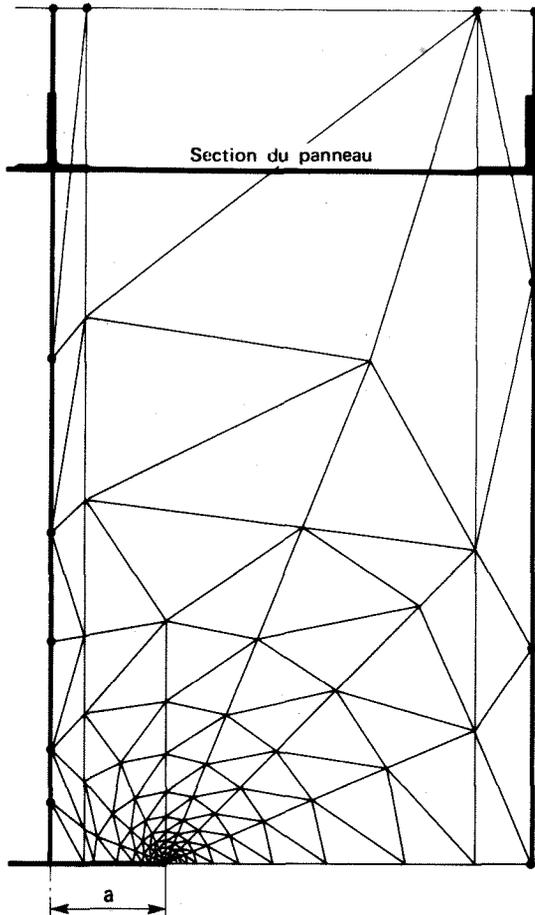


Fig. 25 - Maillage Ficiel.

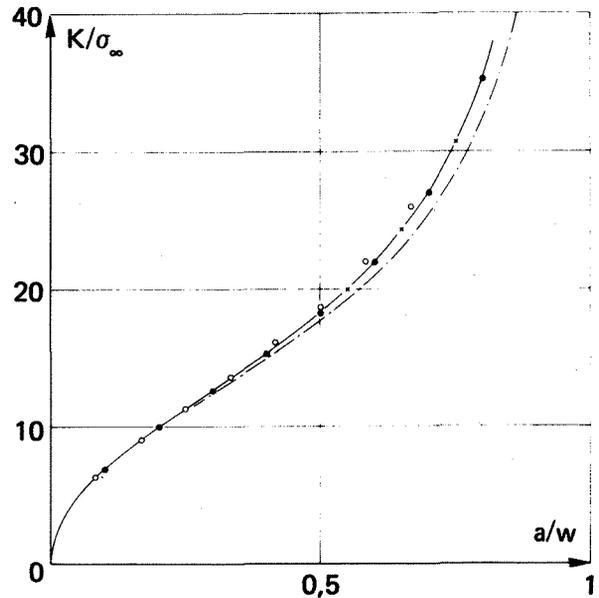


Fig. 27 - Facteurs d'intensité des contraintes pour plaques de largeur finie.  
• Isida, x Wilson, o Kobayashi, — calcul Ficiel.

#### 2.2.2.1.2 Méthode de la flexibilité inverse [33]

Le calcul de prévision de progression de fissure, ou de la résistance résiduelle exige la connaissance d'un grand nombre de valeurs de  $K$ . L'emploi des méthodes numériques classiques conduit alors à des temps de calcul prohibitifs, car il faut, pour chaque longueur de fissure prise en compte, résoudre un problème différent, ce qui multiplie le temps d'unité centrale par le nombre de cas. La méthode de la flexibilité inverse, présentée ici, réduit considérablement les temps de calcul, et rend ainsi possible le traitement numérique. Dans un but de simplification, la méthode sera décrite relativement à un cas symétrique sans nuire à la généralité. Considérons donc (figure 28) un quart de plaque fissurée.

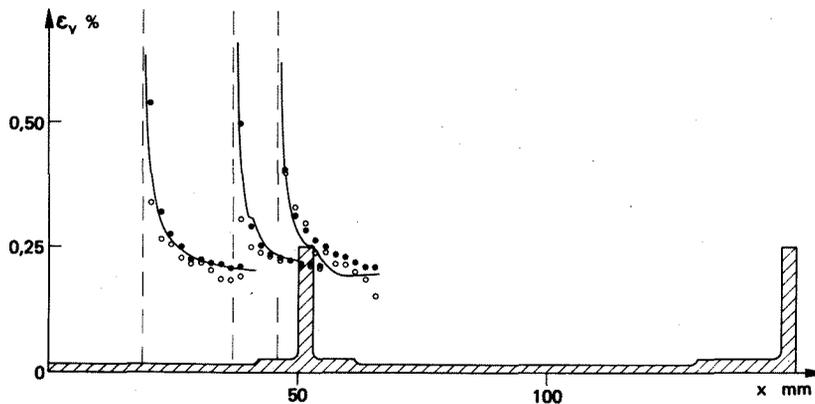


Fig. 26 - Résultats de calcul Ficiel comparés à l'expérience.



Remarquons toutefois que du fait de "l'inversion partielle" de la matrice de rigidité, on ne peut accéder aux contraintes et aux déplacements.

### 2.2.2.2. Méthode expérimentale

Elle repose essentiellement sur une idée de W. Barrois [34] développée à l'ONERA [35]. L'hypothèse de base consiste à admettre l'existence, dans la structure réelle, d'un domaine, dit "domaine d'équivalence" tel que la distribution des contraintes, déformations et déplacements y est identique à celle qui existerait dans une plaque fictive, infinie, chargée en traction par une contrainte "à l'infini"  $\sigma_\infty^*$  et présentant une fissure de demi longueur  $a^*$ . Dans ce dernier cas, le facteur d'intensité des contraintes  $K^*$  vaut :

$$2.11 \quad K^* = \sigma_\infty (\pi a)^{1/2}$$

Le "lissage" des champs de contraintes, (ou déformation) ou de l'ouverture de la fissure, mesurés par les modèles de la plaque infinie, fournit alors  $\sigma^*$  et  $a^*$ , et  $K$  est calculé alors au moyen de 2.11.

Une variante de la méthode consiste à extrapoler le graphe de  $u^2/r$  en fonction de pour  $r$  tendant vers zéro ( $u$  désignant l'ouverture de fissure, et  $r$  la distance de la piste de fissure à laquelle on mesure  $u$ ) (voir

figure 30). ; on sait que pour une plaque infinie,  $u^2/r$  tend vers  $\alpha K$  quand  $r$  tend vers 0 ( $\alpha$  étant un coefficient qui ne dépend que des caractéristiques mécaniques du matériau). Le concept de domaine d'équivalence permet alors une détermination analogue dans une structure de dimensions finies.

Les résultats d'une telle méthode expérimentale sont présentés figure 31, et confrontés à ceux obtenus numériquement (ou analytiquement le cas échéant). L'accord est excellent.

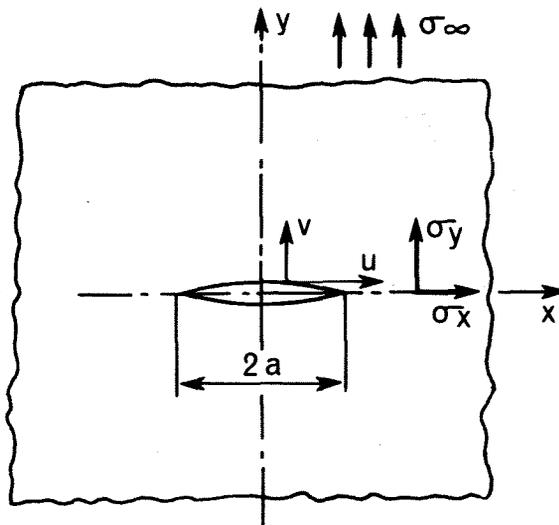


Fig. 30 - Définition des variables.

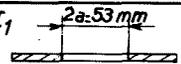
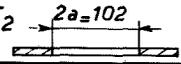
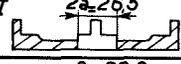
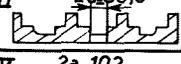
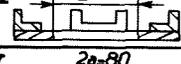
Valeurs de $K (hb\sqrt{mm})$				
Méthodes utilisant des mesures d'ouvertures				
Panneaux sollicités en mode I $\sigma_\infty = 14 \text{ daN/mm}^2$	Identification par la limite	Identification par la méthode des moindres carrés	Valeurs de $K$ déterminées par la loi de PARIS-FORMAN	Valeurs de $K$ (Définition énergétique) calculées par éléments finis (Progr. FICEL)
I <sub>1</sub> 	132	133	127	130
I <sub>2</sub> 	222	216	191	193
II 	176	173	185	175
III 	136	137	132	131
IV 	195	192	190	180
V 	159	159	163	157,5

Fig. 31 - Comparaison entre valeurs calculées et déterminées par essai du facteur d'intensité des contraintes.

2.2.3 Modèle de progression de fissure

2.2.3.1 Remarques générales

Dans le cas de chargements périodiques à force minimale, nulle ou pas, les divers modèles de progression de fissure de fatigue proposés donnent des résultats satisfaisants. Citons, pour mémoire, les travaux de Paris [36], Walker [37], Elber [38], Forman [39]

Cette liste n'est évidemment pas exhaustive.

Quand le chargement n' est plus périodique, et plus précisément quand l'amplitude de chargement n'est pas constante, il est bien connu qu'il existe "un effet d'histoire", dont la figure 32 donne une illustration dans deux cas particuliers. Jusqu'à présent deux types de modèles ont tenté de traduire cet effet : ceux fondés sur la schématisation de la zone plastique à la pointe de fissure, et dont la base est le modèle de Wheeler [40] et ceux fondés sur la notion d'ouverture de fissure, et dérivant du modèle d'Elber [38]. Ces deux approches ne donnent cependant pas totale satisfaction :

- les modèles du premier type ne traduisent pas l'existence d'un seuil de fissuration et sont quelquefois incapables de distinguer les effets de deux histoires "simples" (voir figure 32). Enfin, la prise en compte de la zone plastique se fait au travers du rapport des zones plastiques ( $\lambda$ ), dont l'exposant n'est pas intrinsèque au matériau, mais dépend des conditions d'essai, ce qui nuit à "l'objectivité" du modèle.
- les inconvénients du second type sont de deux ordres : d'une part des divergences sérieuses existent entre les divers résultats de calcul, d'autre part des désaccords sont également sensibles entre les diverses mesures du facteur d'intensité des contraintes à ouverture.

Le modèle proposé par l'ONERA [41] évite les critiques précédentes, mais ne peut encore prétendre, actuellement, à une représentation parfaite de tous les cas de progression. Toutefois, il apporte des améliorations très sensibles et sa formulation de base offre suffisamment de souplesse pour pouvoir évoluer encore vers une meilleure traduction de la réalité.

Un grand nombre d'essais [42] a confirmé qu'à chaque moment de la progression des fissures, il existe un facteur d'intensité des contraintes appelé "seuil de fissuration" tel que si la valeur maximum du f.i.c au cours du cycle lui est inférieure, la fissure ne progresse pas. Ces remarques mettent en évidence la notion de facteur d'intensité des contraintes effectif ( $K_{eff}$ )

$$K_{eff} = K - K_S$$

K désignant la valeur maximum au cours du cycle du f.i.c correspondant à l'actuel du chargement et de la fissure,  $K_S$  étant le seuil. Il est alors naturel de poser :

$$2.12 \quad \frac{da}{dN} = f(K - K_S)$$

la fonction f étant telle que :

$$2.13 \quad f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0$$

Le paramètre  $K_S$ , traduisant les "effets d'histoire", est variable avec le temps (ou le nombre de cycles) et il est donc nécessaire de préciser son évolution, par exemple par une relation du type :

$$2.14 \quad \frac{dK_S}{dN} = g(K, K_S)$$

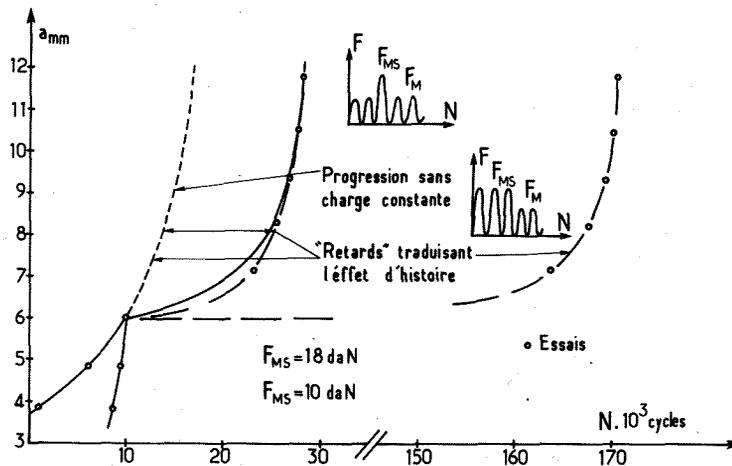


Fig. 32 - Illustration de l'effet d'histoire.

L'explication des fonctions  $f$  et  $g$  définit donc le modèle ONERA.

2.2.3.2 Explication de la fonction  $f$

De manière classique maintenant, on pose :

2.15 
$$\frac{da}{dN} = C(K - K_S)^n \text{ si } K > K_S$$

2.16 
$$\frac{da}{dN} = 0 \text{ si } K \leq K_S$$

2.2.3.3 Etude de l'évolution de  $K_S$

Dans le cas particulier d'essais à amplitude constante,  $K_S$  dépend de deux paramètres (voir figure 33).

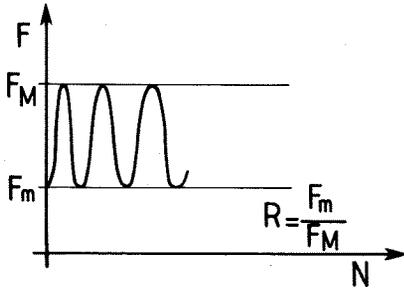


Fig. 33 - Définition de  $R$ .

- .  $K$  : f.i.c maximum au cours du cycle
- .  $R$  : rapport de la force (ou du f.i.c) minimum à sa valeur maximum au cours du cycle.

L'expérience montre qu'une expression ;

2.17 
$$K_S = \frac{K}{R_2(R)}$$

est bien vérifiée, la fonction  $R_2(R)$  s'explicitant

2.18 
$$R_2(R) = R_2^* - R(R_2^* - 1)$$

$R_2^* = R_2(0)$  étant intrinsèque au matériau ; pour le duralumin AU4G-T3 on trouve par exemple :

2.19 
$$R_2^* = 1,9$$

Les relations (2.15), (2.17) et (2.18) permettent alors, dans le cas des essais à amplitude constante, de montrer que le modèle proposé est bien cohérent avec ceux mentionnés en 2.2.3.1 ; on trouve, en effet : après élimination de  $K_S$  :

2.20 
$$\frac{da}{dN} = C.K^n . f(R)$$

2.21 
$$f(R) = \frac{R_2^*(1-R)}{R_2(R)}$$

la fonction  $f(R)$  traduisant très correctement l'effet de la force minimale ainsi que le montre la figure 34. Notons, enfin, que seule la formulation (2.21) peut traduire l'effet des forces minimales négatives ( $R < 0$ ).

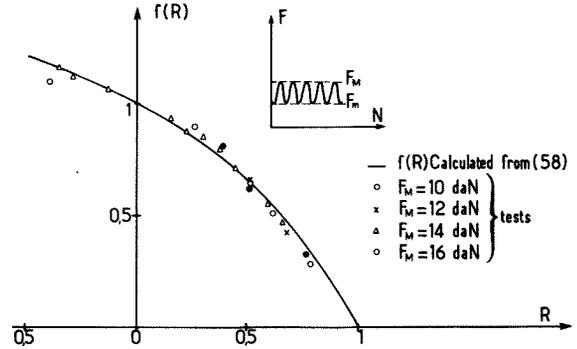


Fig. 34 - Comparaison des valeurs calculées et mesurées pour  $f(R)$ .

L'interprétation des essais de base à amplitude variable conduit alors à une explicitation de la fonction  $g$  :

2.22 
$$\frac{dK_S}{dN} = \alpha(R, R_S) \left( \frac{K}{R_2(R)} - K_S \right) \lambda^\delta$$
  
avec

2.23 
$$\alpha(R, R_S) = \frac{(R_2(R) - 1) \cdot R_2(R_S)}{R_1(R_S) \cdot R_2(R) - R_2(R_S)}$$

$R, R_S$  sont définis sur la figure 35 ;  $\lambda$  est le rapport des zones plastiques et  $\delta$  son exposant, intrinsèque au matériau.

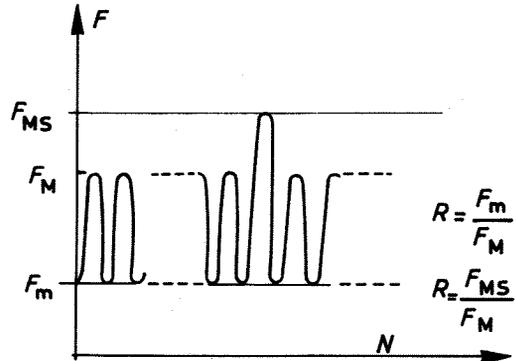


Fig. 35 - Surcharge.

Une synthèse des comparaisons calcul-essai est présentée sur la figure 36. Elle concerne la prévision des retards à la fissuration observés par des types d'essais différents, et on note un très bon accord dans l'ensemble. Il nous faut toutefois signaler que ce modèle est défaillant pour prévoir l'évolution correcte du seuil dans un cas très précis (indiqué sur la figure) ; des travaux sont en cours pour tenter de remédier à cet inconvénient.

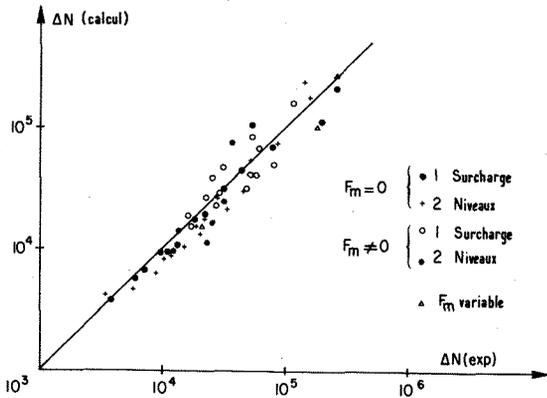


Fig. 36 - Synthèse des comparaisons.

## 2.3 Problèmes tridimensionnels

### 2.3.1 Remarques générales

L'ensemble des résultats évoqués en 2.2 montre que le problème de la prévision de la progression des fissures dans les structures bidimensionnelles est en bonne voie d'être résolu ; il en va différemment pour les structures tridimensionnelles où le front de fissure n'est plus défini par un point comme en bidimensionnel, mais par une courbe (C) de l'espace à 3 dimensions ; l'accroissement de fissure se définissant par un champ de vecteurs qui constitue alors l'inconnue de base du problème. L'exposé qui suivra fait le point des recherches actuellement en cours à l'ONERA, et doit donc s'interpréter comme une information destinée à mettre en évidence les axes de recherche et non pas comme une présentation de méthodes éprouvées d'application générale.

2.3.2 Pour résoudre le problème posé, nous proposons de nous appuyer sur un principe de maximum d'énergie libérée que nous formulons comme suit [43].

Considérons une structure fissurée, soumise au chargement extérieur  $F$  ; le matériau la constituant est supposé élastique linéaire.

Désignons par  $M$  un point courant de la surface de fissure et par

$$2.24 \quad X = \underset{\sim}{X}(M)$$

l'équation paramétrique de cette surface.

Le travail des efforts extérieurs s'exprime alors par la relation :

$$2.25 \quad W = \underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{X}(M), F, \dots)$$

L'accroissement d'aire de fissure est défini par un champ de vecteurs :

$$2.26 \quad h = \underset{\sim}{h}(M)$$

et il sera réputé thermodynamiquement admissible si la variation corrélatrice du travail des forces extérieures est non négative :

$$2.27 \quad \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{X}} \cdot \underset{\sim}{h} \geq 0$$

Ceci signifie que le point de fonctionnement  $P$  dans l'espace des paramètres de configuration se dirige vers l'extérieur de la surface équipotentielle :

$$2.28 \quad \underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{X}(M)) - \lambda = 0$$

correspondant à la valeur  $F$  du chargement extérieur.

Le principe proposé est alors formulé :

"Parmi tous les champs d'accroissement thermodynamiquement admissibles, le champ réel est normal à la surface équipotentielle au point de fonctionnement considéré".

Ceci entraîne :

$$2.29 \quad \underset{\sim}{h}(M) = d\alpha \cdot \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{X}}$$

$d\alpha$  est un scalaire précisant la loi de comportement du matériau à la fissuration. Plus précisément, nous recherchons une loi de comportement du matériau du type :

$$2.30 \quad \frac{d\alpha}{dN} = f(g)$$

avec

$$2.31 \quad g = \left| \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{X}} \right| = \left( \overline{\frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{X}}} \cdot \overline{\frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{X}}} \right)^{1/2}$$

(la barre dénotant la transposition).

Notons ici que cette formulation (2.29) sépare formellement le comportement du matériau à la fissuration précisé par le paramètre "dynamique"  $d\alpha$ , de la caractérisation d'un état de fissuration décrit par le paramètre "statique"  $g$  ; cette même séparation existant en bidimensionnel, où le facteur d'intensité des contraintes  $K$  se calcule indépendamment de la loi de fissuration du matériau.

Ceci distingue essentiellement notre approche de celle proposée très récemment par

Nguyen Quoc Son<sup>[44]</sup>, également basée sur un principe de normalité, mais qui ne sépare pas formellement les paramètres "statiques" et "dynamiques".

Une première confrontation calcul-essai a été effectuée dans le cas d'un barreau prismatique, de section rectangulaire 80 x 20 mm, en AU2GN-T6. Après avoir créé, par électroérosion, une fissure artificielle semi-circulaire de rayon 7 mm (voir figure 37), on soumet l'éprouvette à une traction ondulée, la contrainte maximale étant de 7,5 daN/mm<sup>2</sup> et la fréquence d'essai de 5 Hz ; les cycles de contrainte sont de forme sinusoïdale.

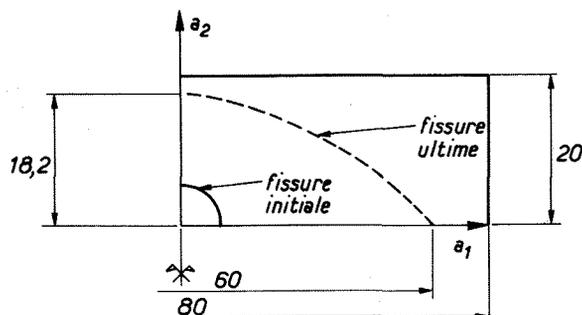


Fig. 37 - Fronts de fissure.

La fissure est supposée se propager dans un plan normal à la direction de sollicitation, ce qui est d'ailleurs conforme à la symétrie de l'ensemble (charge, structure) et bien confirmé par l'expérience.

Les mesures effectuées en fonction du nombre de cycles sont de deux types :

- optiques, pour la partie débouchante de la fissure (de longueur  $2a_1$ )
- électriques, pour l'ensemble du front de fissure, grâce à la mise en oeuvre de la méthode récemment mise au point à l'ONERA<sup>[45]</sup>, et qui constitue un progrès très sensible dans le domaine de la métrologie de la fissuration.

L'éprouvette est ensuite rompue statiquement en fin d'essai, le faciès de rupture permettant alors un recouplement avec les mesures électriques.

La comparaison porte sur l'évolution de la profondeur de fissure ( $a_2$ ) en fonction de la demi-largeur ( $a_1$ ) ; on voit, sur la figure 38 que la mise en oeuvre du principe de normalité proposé donne de bons résultats, bien que le calcul ait tendance à surestimer la "vitesse" relative  $da_2/da_1$ , l'écart avec l'expérience atteignant 12 % en fin d'essai, au moment où la fissure a presque entièrement débouché.

Sur cette même figure, on a porté le point A, obtenu en interrompant un essai effectué dans des conditions identiques, et en mesurant optiquement, après rupture statique de l'éprouvette,  $a_1$  et  $a_2$ . On note que cette détermination confirme bien les résultats obtenus avec la méthode du potentiel électrique, et met en évidence une dispersion de comportement qui, bien que peu importante, peut expliquer une partie de l'écart observé.

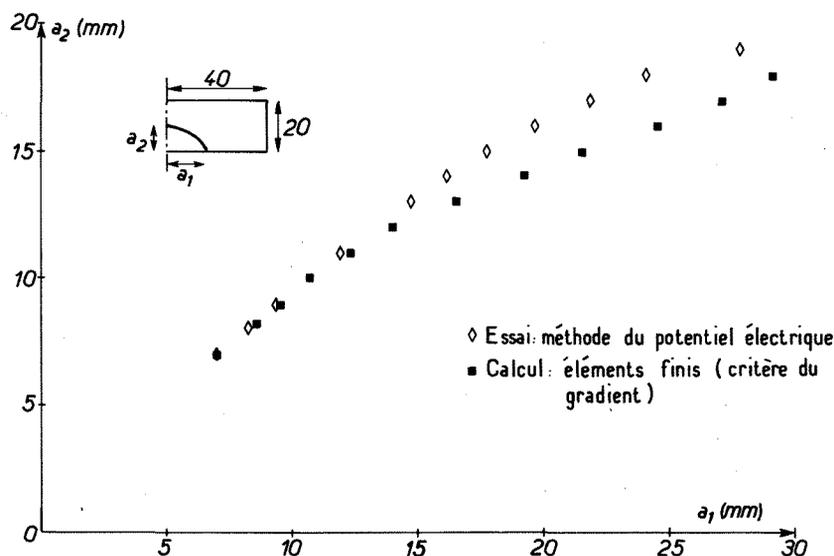


Fig. 38 - Evaluation du critère de forme.

Ce même essai a permis également une première approche du comportement du matériau ; conformément à la formulation présentée (équations, 2.29, 2.30 et 2.31), on apporte, dans un graphe logarithmique,  $\frac{dA}{dN}$  en fonction de  $g$  : on voit (figure 39) que la fonction  $f$  de l'équation 2.30 peut parfaitement se traduire par

$$2.32 \quad f(g) = C \cdot g^\beta$$

ce qui est identique, formellement, à une loi de Paris ; il reste, toutefois, à montrer que les paramètres  $C$  et  $\beta$  sont bien des constantes intrinsèques du matériau. Une telle vérification est actuellement en cours.

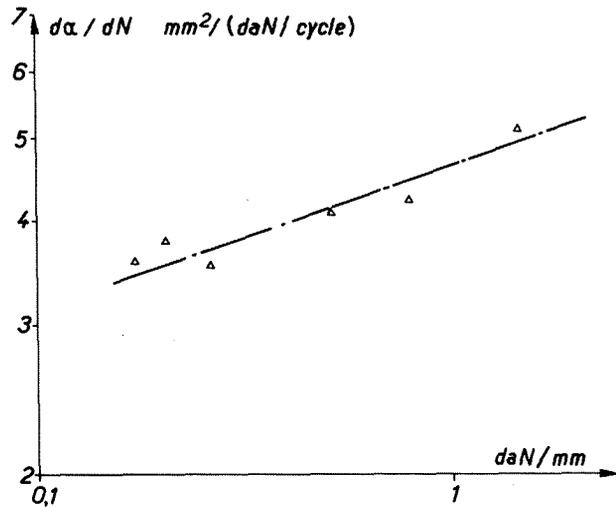


Fig. 39 - Loi de comportement.

Un dernier résultat mérite également d'être mentionné : ayant mesuré en cours d'essai les divers fronts de fissure, il est facile de traduire l'expérience dans le plan (vitesse aréolaire,  $g$ ) ; les résultats sont indiqués figure 40 où l'on note qu'une relation du type

$$2.33 \quad \frac{dA}{dN} = C' \cdot g^\gamma$$

convient parfaitement pour "lisser" les résultats expérimentaux. L'exposant  $\gamma$  vaut 1,75 dans le cas particulier présenté ; sachant que le paramètre calculé  $g$  est homogène, au paramètre de Griffith  $G$ , on peut déduire, grâce à une hypothèse de déformation plane par exemple, un facteur d'intensité des contraintes "moyen" pour chaque front de fissure. Compte tenu de l'analyse dimensionnelle, la vitesse aréolaire s'exprime alors :

$$2.34 \quad \frac{dA}{dN} = C'' \cdot \bar{K}^{2\gamma}$$

$\bar{K}$  désignant le facteur d'intensité des contraintes moyen. On remarque alors que l'exposant  $2\gamma = 3,5$ , est tout à fait cohérent avec l'exposant de Paris du matériau déterminé

par essais sur tôles minces. Sur la figure 40, nous avons porté les points obtenus à partir de l'essai tridimensionnel, et ceux résultant d'essais bidimensionnels obtenus à l'ONERA par essai de flexion sur éprouvettes minces ( $e = 1,6$  mm) pour un matériau identique. L'examen du graphe suggère alors que la loi classique de Paris est la traduction, dans le cas particulier bidimensionnel, d'une loi plus générale, décrite par la relation 2.34.

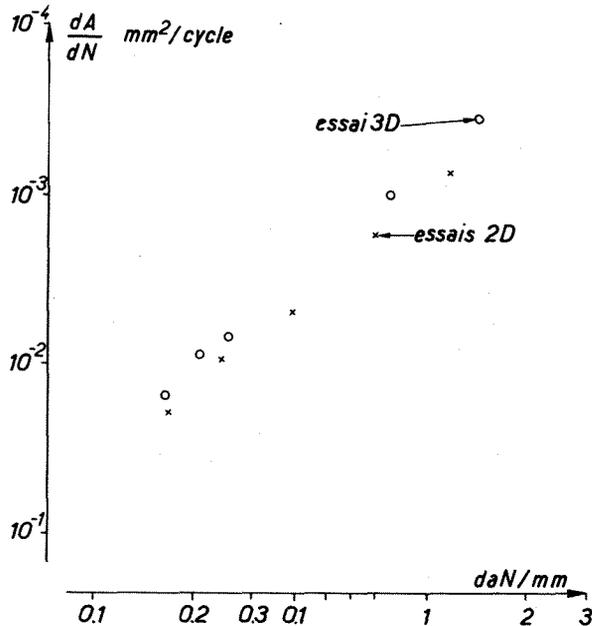


Fig. 40 - Comparaison essais bi et tridimensionnels - AU2GN-T6.

Signalons, enfin, que le principe de normalité a également permis de traduire [46], d'une manière satisfaisante, les variations du chemin de fissure dans une structure bidimensionnelle soumise à un chargement "non simple", c'est-à-dire tel que les forces extérieures ne croissent pas toutes proportionnellement à un paramètre scalaire.

#### 2.4 Conclusions

Les résultats acquis concernant les structures bidimensionnelles ont été suffisamment nombreux pour permettre la formulation et la mise en oeuvre de méthodes confirmées. Comme nous l'avons signalé, il reste encore dans ce domaine à améliorer le modèle de progression de fissure dans le cas de chargements non périodiques.

Concernant les aspects tridimensionnels, il nous faut rappeler que les résultats présentés ici sont encore trop partiels pour qu'une conclusion définitive puisse en découler ; toutefois, la bonne cohérence observée entre les calculs et les essais tridimensionnels d'une part, ainsi qu'entre la formulation du principe de normalité et les lois de comportement bien établies en bidimensionnel d'autre part, nous paraît justifier la poursuite des travaux de recherche selon la voie évoquée ici.

## Références

- [1] Griffith A.A - "The phenomena of rupture and flow in solids" - Philosophical Trans. of Royal Socy of LONDON, Serial A (1920).
- [2] Odqvist, FK - Hult J. - "Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe". Springer Verlag (1962).
- [3] Rabotnov. YN - "Creep problems in structural members". North Holland publishing company, Amsterdam London (1969)
- [4] Lemaitre J. "Sur la détermination des lois de comportement des matériaux élastique et viscoplastique". Publication ONERA n° 135 (1971). Elasto-viscoplastic constitutive equations for quasi-static structures calculations. Com.at Polish Acad.of.Sc.Jablonna (1972).
- [5] Mandel J. "Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques". Int.J.Solids Structures, 1973, vol.9 725-740.
- [6] Perzyna P. - "Memory effects and internal changes of a material". Int.j.Non Linear Mechanics, 1971, 6, 707-716.
- [7] Malinin NN - Khadjinsky GM - "Theory of creep with anisotropic hardening. Int.J.Mech.Sci.1972, Vol.14, 235-246.
- [8] Kratochvil J.- "Thermodynamics of elastic-inelastic materials at finite strain". Bulletin de l'Académie des Sciences de Pologne (1974).
- [9] Zarka J.- "Modèle phénoménologique unidimensionnel pour l'étude du comportement viscoplastique du polycristal en grandes déformations". L'Industrie Minérale. Rhéologie. Avril 1973.
- [10] Rabotnov YN. - "Creep rupture". 12th Int. Congress of Applied Mechanics Stanford 1968.
- [11] Kachanov LM. - "Problems of continuum Mechanics" Society for Industrial and Applied Mathematics - Philadelphia 1961.
- [12] Chaboche JL. - Description thermodynamique et phénoménologie de viscoplasticité cyclique avec endommagement. Pub. ONERA n° 1978-3.
- [13] Halphen B-Nguyen QS - "Sur les matériaux standard généralisés". Journal de Mécanique, Vol 14, n° 1 1975.
- [14] Chaboche JL.- "Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic and anisotropic behaviour of metals". 17ème Conf.Polonaise de Mécanique des Bull. Ac. Sc. Polonaise - 6, Sciences techniques, Vol. 25 n° 1 (1977), p. 33-42.
- [15] Lemaitre J. Chaboche JL - "A non linear model of creep fatigue damage cumulation and interaction". Symp. IUTAM Mechanics of Viscoelastic media and bodies. Göteborg (Suède) ( 1974). Springer Verlag.
- [16] Chaboche JL - "Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire". Revue Française de Mécanique n° 50-51 1974.
- [17] Lemaitre J.- "Elasto-viscoplastic constitutive equations for structure quasistatic calculations". Mécanique des Matériaux inélastiques Jablonna Pologne (1972).
- [18] Berger H. - "Etude sur des cas simples de méthodes de calcul en fluage". Rech.Aérosp. (1970) n° 134.
- [19] Chaboche JL. C. Stoltz - "Détermination des durées de vie des aubes de turbines à gaz". R.F.M. n° 52 (1974).
- [20] Lemaitre J. Chaboche JL. Y. Munakata "Method of metal characterization for creep and low cycle fatigue prediction in structures. Example of UDIMET 700". (1973) Symp.on Mechanical behaviour of Materials, Kyoto Japan (1973), Proceedings, pp. 239-249.
- [21] Lemaitre J. - "Creep deformation of a cylinder under complex varying loading" 2nd IUTAM Symposium on Creep of structures Goteborg , Suède (1970).
- [22] Manson SS. - "Behaviour of materials under conditions of thermal stress". NACA Tech. Note 2933 (1954).
- [23] Coffin LF - "A study of the effects of cyclic thermal stresses in a ductile metal". Trans. ASME, 76 (1954).
- [24] Chaboche JL. - "Stress calculations for lifetime prediction in turbine blades" Int.J.Solids and Structures, 1974, 10.
- [25] Chaudonneret M. - Calcul des concentrations de contraintes en élastoviscoplasticité. Pub. ONERA n° 1978-1.

- [26] Muskelishvili NI - "Some basic problems of the mathematical theory of elasticity Noordhoff LTD (1953).
- [27] Westergaard HM - "Bearing pressure and cracks" Trans.ASME Vol 61 (1939).
- [28] Bergez D. - " La rupture des plaques et coques fissurées  
Thèse-Université Paris VI - 1974.
- [29] Lemaitre J. - "Extension de la notion de taux d'énergie de fissuration aux problèmes tridimensionnels et non linéaires"  
C.R.Acad.Sci.T. 282 B (1976).
- [30] Liebowitz H. - Sih G.G  
"Mathematical theories of brittle fracture."  
Fracture Vol.2 Acad.Press (1968).
- [31] Chaboche J.L-Monthulet A  
"Calcul du facteur d'intensité des contraintes pour la prévision de la progression des fissures"  
La recherche Aérospatiale n° 4 1974.
- [32] Pellas J. Sechet J.P.  
Document à paraître
- [33] Labourdette R. Pellas J.  
"Estimation of residual strength of structures by inverse flexibility method"  
A paraître dans Eng.Fract.Mech.
- [34] Barrois W. - "Manual of fatigue of structures. Fundamental and physical aspects AGARD MAN B. 1970.
- [35] Monthulet A. Bhandari S. Rivière C.  
"Méthodes pratiques de détermination du facteur d'intensité des contraintes pour la propagation des fissures".  
La Rech.Aérospatiale n° 5 1971.
- [36] Paris PC  
The trend in engineering  
Vol.13 n° 1,9 University of Washington Seattle 1961.
- [37] Walker K.  
"The effects of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-TE and 7075-T6 aluminium"  
ASTM STP 462 (1970).
- [38] Elber W. - "The significance of fatigue crack closure"  
ASTM STP. 486 1971.
- [39] Forman RG - Kearney Ve- Engler RM  
"Numerical analysis of crack propagation in a cyclic loaded structure"  
ASME tran.J.Basic.Eng.89 D 1967.
- [40] Wheeler OE.- "Spectrum loading and crack growth"  
Journ.of Basic.Eng.Mars 1972.
- [41] Pellas J.Baudin G. Robert M.  
"Prévision de la progression des fissures de fatigue sous chargement réel dans les structures minces".  
ATMA Paris 1976.
- [42] Pellas J. - Baudin G. - Robert M.  
"Mesure et calcul du seuil de fissuration après surcharge"  
La Rech.Aérospatiale 3 - 1977.
- [43] Labourdette R. - Pellas J. -  
"A new approach to the problem of three dimensional crack growth"  
A paraître dans Int.Journ.of Fract. juin 1978.
- [44] Nguyen Quoc Son -  
"Sur l'utilisation des critères de l'énergie en rupture et en fatigue".  
C.R. Acad.Sc.Paris. t.286.Série 9 1978.
- [45] Baudin G. - Policella H. -  
"Développements récents de la méthode du potentiel électrique.Application à la mesure en continu de la longueur des fissures".  
à paraître dans la Rech.Aérop.1978.
- [46] Gilles P.  
"Thèse de Docteur Ingénieur"  
à paraître en 1978.